Suite IV - Die Zerrissene

Teil 5: Essays 300-308

Meinem Vater

Beiträge zum EK.

$c\_E\_.$, ϕ-**rekursiv (mit Startwert** $\{(p,q)\}$**).**

$1+.$, ϕ-**rekursiv (mit Startwert** $\{(p,q)\}$**.)**

Archimedes III.

$1+.$, ϕ-**rekursiv (mit Startwert** $\{(p,q)\}$**.)**

$\mathtt{rf}0q\phi$.

MSC2010: 03D20, 11A99, 97I99.

Andreas Unterreiter

19. Juni 2015

Mengenlehre: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$.
$\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ Unmenge, $n \in \mathbb{N}$.

Ersterstellung: 24/06/14 **Letzte Änderung: 25/06/14**

300-1. Auf dem Weg zum Nachweis, dass es sich bei $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$, $n \in \mathbb{N}$, um *Unmengen* handelt ist $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ ein hilfreicher Begleiter.

300-1(Satz)

a) $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ *Relation.*

b) $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ *Funktion.*

c) *Aus "x Unmenge" folgt "$\{.\}.\mathsf{cup}\_x = 0$".*

d) *Aus "x Menge" folgt "$\mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}$".*

e) *Aus "x Menge" folgt "$\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}_{\text{sngltn }\mathtt{ni}} \cup x$".*

f) *Aus "x Menge" folgt "$\{.\}.\mathsf{cup}\_x : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn }\mathtt{ni}} \cup x$".*

g) "$(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(p) = \{p\} \cup x$"
genau dann, wenn "$(p, x$ Menge$) \vee (\{p\} \cup x = \mathcal{U})$".

h) *Aus "$(p, q) \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x$" folgt "$q = \{p\} \cup x$".*

Beweis **300-1** a)
Via **243-3** gilt: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Relation.

b)

1.1: Via **27-14** gilt: $\{.\}$ Funktion.

1.2: Via **298-4** gilt: cup Funktion.

2: Aus 1.1 "$\{.\}$ Funktion" und
aus 1.2 "cup Funktion"
folgt via **243-7**: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion.

<u>Beweis **300-1**</u> `c)` `VS` gleich x Unmenge.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x$"
folgt via **243-2**: $\exists \Phi, \Psi : ((\Phi, x), \Psi) \in \mathsf{cup}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots ((\Phi, x), \Psi) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **9-15**: (Φ, x) Menge.

`4:` Aus `3` "(Φ, x) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: x Menge.

`5:` Es gilt `4` "x Menge".
Es gilt `VS` gleich "x Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x) \Rightarrow (\alpha \notin \{.\}.\mathsf{cup}\_x)$.

Konsequenz via **0-19**: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x = 0$.

Beweis **300-1** `d)` `VS` gleich x Menge.

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\alpha\}$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **27-10**: $(\alpha, \{\alpha\}) \in \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`2.3:` Via **27-8(Def)** gilt: $\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\{\alpha\}$ Menge" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **298-3**: $((\{\alpha\}, x), \{\alpha\} \cup x) \in \mathsf{cup}$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(\alpha, \{\alpha\}) \in \{.\}$.

`4:` Aus `3.2` "$(\alpha, \{\alpha\}) \in \{.\}$" und
aus `3.1` "$((\{\alpha\}, x), \{\alpha\} \cup x) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **243-2**: $(\alpha, \{\alpha\} \cup x) \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

`5:` Aus `4` "$(\alpha, \{\alpha\} \cup x) \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x))$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **300-1**</u> `e)` `VS` gleich x Menge.

`Thema1.1` $\alpha\in\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha\in\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega:(\Omega,\alpha)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

`3:` Aus `2` "$\ldots(\Omega,\alpha)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x$"
folgt via **243-2**: $\exists\Phi:((\Omega,\Phi)\in\{.\})\wedge(((\Phi,x),\alpha)\in\mathsf{cup})$.

`4.1:` Aus `3` "$\ldots(\Omega,\Phi)\in\{.\}\ldots$" und
aus **27-8(Def)** "$\{.\}=\{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(\Omega,\Phi)\in\{.\}_{\mathcal{U}}$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots((\Phi,x),\alpha)\in\mathsf{cup}$"
folgt via **298-3**: $\alpha=\Phi\cup x$.

`5:` Aus `4.1` "$(\Omega,\Phi)\in\{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt via **27-10**: $(\Omega\in\mathcal{U})\wedge(\Phi=\{\Omega\})$.

`6.1:` Aus `5` "$\Omega\in\mathcal{U}\ldots$"
folgt via **27-3**: $\{\Omega\}\in\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`6.2:` Aus `5` "$\ldots\Phi=\{\Omega\}$" und
aus `4.2`
folgt: $\alpha=\{\Omega\}\cup x$.

`7:` Aus `6.1` "$\{\Omega\}\in\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **220-4**: $\{\Omega\}\cup x\in\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}}\cup x$.

`8:` Aus `6.2` und
aus `7`
folgt: $\alpha\in\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}}\cup x$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x))\Rightarrow(\alpha\in\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}}\cup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)\subseteq\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}}\cup x$"

...

<u>Beweis **300-1**</u> `e)` `VS` gleich x Menge.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}\ \texttt{ni}} \cup x.$

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}\ \texttt{ni}} \cup x$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}}) \wedge (\alpha = \Omega \cup x).$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathcal{U}_{\text{sngltn}} \ldots$”
folgt via **27-6**: $\exists \Phi : (\Phi \text{ Menge}) \wedge (\Omega = \{\Phi\}).$

`4.1:` Aus `3`“$\ldots \Omega = \{\Phi\}$” und
aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \cup x$”
folgt: $\alpha = \{\Phi\} \cup x.$

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \Phi$ Menge...”
folgt via **0-19**: $\Phi \in \mathcal{U}.$

`4.3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Phi\}$ Menge.

`5.1:` Aus `4.2`“$\Phi \in \mathcal{U}$”
folgt via **27-10**: $(\Phi, \{\Phi\}) \in \{.\}_{\mathcal{U}}.$

`5.2:` Aus `4.3`“$\{\Phi\}$ Menge” und
aus `VS` gleich “x Menge”
folgt via **298-3**: $((\{\Phi\}, x), \{\Phi\} \cup x) \in \mathsf{cup}.$

`6:` Aus `5.1`“$(\Phi, \{\Phi\}) \in \{.\}_{\mathcal{U}}$” und
aus `5.2`“$((\{\Phi\}, x), \{\Phi\} \cup x) \in \mathsf{cup}$”
folgt via **243-2**: $(\Phi, \{\Phi\} \cup x) \in \{.\}_{\mathcal{U}}.\mathsf{cup}\_x.$

`7:` Aus `6`“$(\Phi, \{\Phi\} \cup x) \in \{.\}_{\mathcal{U}}.\mathsf{cup}\_x$”
folgt via **7-5**: $\{\Phi\} \cup x \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}.\mathsf{cup}\_x).$

`8:` Aus `4.1` und
aus `7`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}.\mathsf{cup}\_x).$

`9:` Aus `8`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}_{\mathcal{U}}.\mathsf{cup}\_x)$” und
aus **27-8(Def)**“$\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x).$

...

<u>Beweis **300-1**</u> `e)` `VS` gleich x Menge.

...

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x \subseteq \mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) \subseteq \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x$" und
aus `A2` gleich "$\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x \subseteq \mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x$.

`f)` `VS` gleich x Menge.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x$.

`2:` Aus `1.1` "$\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion",
aus `1.2` "$\mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}$" und
aus `1.3` "$\mathsf{ran}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x$"
folgt via **21-2**: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}\ \mathtt{ni}} \cup x$.

Beweis **300-1** g) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)(p) = \{p\} \cup x.$

1: Es gilt: $(p, x \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee (x \text{ Unmenge}).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall p, x Menge.

1.2.Fall p Unmenge.

2: Aus 1.2.Fall"p Unmenge" folgt via **17-3**: $(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)(p) = \mathcal{U}.$

3: Aus 2 und aus VS folgt: $\{p\} \cup x = \mathcal{U}.$

1.3.Fall x Unmenge.

2: Aus 1.3.Fall"x Unmenge" folgt via des bereits bewiesenen c): $\{.\}.\mathsf{cup\_}x = 0.$

3: Aus 2 und aus VS folgt: $0(p) = \{p\} \cup x.$

4: Via **17-7** gilt: $0(p) = \mathcal{U}.$

5: Aus 3 und aus 4 folgt: $\{p\} \cup x = \mathcal{U}.$

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $(p, x \text{ Menge}) \vee (\{p\} \cup x = \mathcal{U}).$

Beweis **300-1** g) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p, x \text{ Menge}) \vee (\{p\} \cup x = \mathcal{U})$.

1: Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)$.

2: Aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in \{.\}.\mathsf{cup\_}x$.

3: Aus 2 "$\ldots (p, \Omega) \in \{.\}.\mathsf{cup\_}x$"
folgt via **243-2**: $\exists \Phi : ((p, \Phi) \in \{.\}) \wedge (((\Phi, x), \Omega) \in \mathsf{cup})$.

4.1: Aus 3 "$\ldots (p, \Phi) \in \{.\} \ldots$" und
aus **27-8(Def)** "$\{.\} = \{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $(p, \Phi) \in \{.\}_{\mathcal{U}}$.

4.2: Aus 2 "$\ldots ((\Phi, x), \Omega) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **298-3**: $\Omega = \Phi \cup x$.

5: Aus 4.1 "$(p, \Phi) \in \{.\}_{\mathcal{U}}$"
folgt via **27-10**: $\Phi = \{p\}$.

6: Aus 4.2 und
aus 5
folgt: $\Omega = \{p\} \cup x$.

7: Aus 6 "$\Omega = \{p\} \cup x$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \Omega) = (p, \{p\} \cup x)$.

8: Aus 7 und
aus 2 "$\ldots (p, \Omega) \in \{.\}.\mathsf{cup\_}x$"
folgt: $(p, \{p\} \cup x) \in \{.\}.\mathsf{cup\_}x$.

9: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\{.\}.\mathsf{cup\_}x$ Funktion.

10: Aus 9 "$\{.\}.\mathsf{cup\_}x$ Funktion" und
aus 8 "$(p, \{p\} \cup x) \in \{.\}.\mathsf{cup\_}x$"
folgt via **18-20**: $(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)(p) = \{p\} \cup x$.

...

<u>Beweis</u> **300-1** `g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p, x \text{ Menge}) \vee (\{p\} \cup x = \mathcal{U})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)$"
folgt via **17-4**: $(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)(p) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup\_}x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1.2.Fall` und
aus `2.2`
folgt: $p \notin \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` "$p \notin \mathcal{U}$"
folgt via **0-23**: p Unmenge.

`5:` Aus `4` und
aus `VS`
folgt: $\{p\} \cup x = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `2.1` und
aus `5`
folgt: $(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)(p) = \{p\} \cup x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)(p) = \{p\} \cup x$.

<u>Beweis **300-1**</u> `h)` `VS` gleich $(p,q)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x$"
folgt via **0-20**: $0\neq\{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x \text{ Unmenge})\Rightarrow(\{.\}.\mathsf{cup}\_x=0)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x$"
folgt via **9-15**: p Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$(p,q)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x$"
folgt via **18-20**: $q=(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(p)$.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: x Menge.

`3:` Aus `1.4`"p Menge" und
aus `2.2`"x Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(p)=\{p\}\cup x$.

`4:` Aus `2.1` und
aus `3`
folgt: $q=\{p\}\cup x$.

□

300-2. Falls $p \in x^C$ - also muss p im Speziellen eine Menge sein - und falls $p \neq q$ - hier kann q eine Unmenge sein - dann folgt $\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x$.

300-2(Satz)

a) *Aus* "$p \in x^C$" *und* "$p \neq q$" *folgt* "$\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x$".

b) *Aus* "$\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x$" *folgt* "$p \neq q$".

c) *Aus* "$p \in x^C$" *und* "$\{p\} \cup x = \{q\} \cup x$" *folgt* "$p = q$".

Beweis **300-2** `a)` `VS` gleich $(p \in x^C) \wedge (p \neq q)$.

`1:` Es gilt: $(\{p\} \cup x = \{q\} \cup x) \vee (\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\{p\} \cup x = \{q\} \cup x$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x^C \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x^C \ldots$"
folgt via **3-2**: $p \notin x$.

`3:` Aus 2"p Menge"
folgt via **2-28**: $p \in \{p\} \cup x$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $p \in \{q\} \cup x$.

`5:` Aus 4"$p \in \{q\} \cup x$" und
aus `2.2`"$p \notin x$"
folgt via **161-1**: $p \in \{q\}$.

`6:` Aus 5"$p \in \{q\}$"
folgt via **1-6**: $p = q$.

`7:` Es gilt 6"$p = q$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots p \neq q$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x$.

<u>Beweis</u> **300-2** `b)` `VS` gleich $\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x.$

`1:` Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = q.$

`2:` Aus `1.1.Fall`“$p = q$”
folgt: $\{p\} \cup x = \{q\} \cup x.$

`3:` Es gilt `2`“$\{p\} \cup x = \{q\} \cup x$”.
Es gilt `VS` gleich “$\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x$”.
Ex falso quodlibet folgt: $p \neq q.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \neq q.$

`c)` `VS` gleich $(p \in x^C) \wedge (\{p\} \cup x = \{q\} \cup x).$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$((p \in x^C) \wedge (p \neq q)) \Rightarrow (\{p\} \cup x \neq \{q\} \cup x).$

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $p = q.$

□

300-3. Da $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ auf x^C injektiv ist, ist $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[E]$ eine Unmenge, wenn E eine Unmenge mit $E \subseteq x^C$ ist.

300-3(Satz)

a) $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ *injektiv auf* x^C.

b) *Aus "E Unmenge" und "$E \subseteq x^C$" und "x Menge" folgt "$(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[E]$ Unmenge".*

c) *Aus "x Menge" folgt "$(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[x^C]$ Unmenge".*

Beweis **300-3** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x)\wedge(\alpha,\gamma\in x^C)$.

1.1: Aus Thema1 "$\ldots(\gamma,\beta)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x\ldots$"
folgt via **0-20**: $0\neq\{.\}.\mathsf{cup}\_x$.

1.2: Aus Thema1 "$\ldots\alpha,\gamma\in x^C$"
folgt via **ElementAxiom**: α,γ Menge.

1.3: Via **300-1** gilt: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion.

1.4: Via **300-1** gilt: $(x$ Unmenge$)\Rightarrow(\{.\}.\mathsf{cup}_x=0)$.

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.4
folgt: x Menge.

2.2: Aus Thema1 "$(\alpha,\beta)\ldots\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x\ldots$" und
aus 1.3 "$\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion"
folgt via **18-20**: $\beta=(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(\alpha)$.

2.3: Aus Thema1 "$\ldots(\gamma,\beta)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x\ldots$" und
aus 1.3 "$\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion"
folgt via **18-20**: $\beta=(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(\gamma)$.

3.1: Aus 1.2 "$\alpha\ldots$ Menge" und
aus 2.1 "x Menge"
folgt via **300-1**: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(\alpha)=\{\alpha\}\cup x$.

3.2: Aus 1.2 "$\ldots\gamma$ Menge" und
aus 2.1 "x Menge"
folgt via **300-1**: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(\gamma)=\{\gamma\}\cup x$.

3.3: Aus 2.2 und
aus 2.3
folgt: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(\alpha)=(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)(\gamma)$.

4: Aus 3.1,
aus 3.2 und
aus 3.3
folgt: $\{\alpha\}\cup x=\{\gamma\}\cup x$.

5: Aus VS gleich "$\ldots\alpha\ldots\in x^C$" und
aus 4 "$\{\alpha\}\cup x=\{\gamma\}\cup x$"
folgt via **300-2**: $\alpha=\gamma$.

Ergp Thema1:

$$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{.\}.\mathsf{cup}\_x)\wedge(\alpha,\gamma\in x^C))\Rightarrow(\alpha=\gamma).$$

Konsequenz via **299-1(Def)**: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ injektiv auf x^C.

<u>Beweis **300-3**</u> `b)` `VS` gleich $(E \text{ Unmenge}) \wedge (E \subseteq x^C) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1.1:` Via **300-1** gilt: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via **300-2** gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x) = \mathcal{U}$.

`1.3:` Via **0-18** gilt: $E \subseteq \mathcal{U}$.

`1.4:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ injektiv auf x^C.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq x^C \ldots$" und
aus `1.3`"$E \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **2-12**: $E \subseteq x^C \cap \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.3`
folgt: $E \subseteq x^C \cap \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$.

`4:` Aus `1.1`"$\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ Funktion",
aus `1.4`"$\{.\}.\mathsf{cup}\_x$ injektiv auf x^C",
uas `3`"$E \subseteq x^C \cap \mathsf{dom}\,(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)$" und
aus `VS` gleich "E Unmenge$\ldots$"
folgt via **299-8**: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[E]$ Unmenge.

`c)` `VS` gleich x Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **3-6**: x^C Unmenge.

`1.2:` Via **0-6** gilt: $x^C \subseteq x^C$.

`2:` Aus `1.1`"x^C Unmenge",
aus `1.2`"$x^C \subseteq x^C$" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[x^C]$ Unmenge.

$\square$

300-4. Vorliegende Definition ebnet den Weg zu der Einsicht, dass $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht leer ist.

300-4(Definition)

$$\mathsf{300.0}() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}.$$

300-5. Irgendwann nervt es, immer wieder $1+(-1+n)=n$ für natürliche Zahlen n als Zwischenschritt in Induktions-Beweisen verifizieren zu müssen. Es ist Zeit, diese Aussage an die Oberfläche zu holen. Andererseits ist $2+(-1+x)=1+x$ universell verfügbar.

300-5(Satz)

a) *“$-1+(1+x)=x$” genau dann, wenn “$(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$”.*

b) *“$1+(-1+x)=x$” genau dann, wenn “$(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$”.*

c) *Aus “$n\in\mathbb{N}$” folgt “$1+(-1+n)=n$”.*

d) *$2+(-1+x)=1+x$.*

Beweis **300-5** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $-1+(1+x)=x$.

1: Via **95-6** gilt: $(x$ Zahl$)\vee(x\notin\mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`1.2.Fall` $x\notin\mathbb{A}$.

2: Aus `1.1.Fall` “$x\notin\mathbb{A}$” folgt via **96-14**: $1+x=\mathcal{U}$.

3: $-1+(1+x)\stackrel{2}{=}-1+\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{96-19}}{=}\mathcal{U}$.

4: Aus 3 “$-1+(1+x)=\ldots=\mathcal{U}$” und aus VS gleich “$-1+(1+x)=x$” folgt: $x=\mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$.

1: Aus VS gleich “$(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$” folgt via **FSA0**: $0+x=x$.

2: $-1+(1+x)\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}(-1+1)+x\stackrel{+\mathbf{schola}}{=}0+x\stackrel{1}{=}x$.

3: Aus 2 folgt: $-1+(1+x)=x$.

Beweis **300-5** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $1+(-1+x)=x.$

1: $-1+(1+x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-1+1)+x \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (1+(-1))+x \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} 1+((-1)+x)$
$= 1+(-1+x) \stackrel{\mathtt{VS}}{=} x.$

2: Aus 1 "$-1+(1+x)=\ldots=x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(x \text{ Zahl}) \vee (x=\mathcal{U}).$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x=\mathcal{U}).$

1: Aus VS gleich "$(x \text{ Zahl}) \vee (x=\mathcal{U})$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $-1+(1+x)=x.$

2: $1+(-1+x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (1+(-1))+x \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} ((-1)+1)+x \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-1)+(1+x)$
$= -1+(1+x) \stackrel{\mathtt{1}}{=} x.$

3: Aus 2
folgt: $1+(-1+x)=x.$

c) VS gleich $n \in \mathbb{N}.$

1: Aus VS gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

2: Aus 1 "n Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\boxed{1+(-1+n)=n}$

d)

1: $2+(-1+x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (2+(-1))+x \stackrel{+\mathbf{schola}}{=} 1+x.$

2: Aus 1
folgt: $2+(-1+x)=1+x.$

$\square$

300-6. Für die hier benötigten Aussagen reicht **296-12** nicht aus.

300-6(Satz)

Aus "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$p \notin x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" *und* "$p$ *Menge*"
folgt "$\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$".

Beweis **300-6** `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \notin x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (-1 + n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **27-6**: $\{p\} \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`2.2:` Via **296-12** gilt: $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$n = 0$"
folgt: $x \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\{p\} \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$.

`3.2:` Aus `2.3` "$x \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathcal{U}_0$.

`4.1:` Aus `3.1` "$\{p\} \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$" und
aus +**schola** "$1 + 0 = 1$"
folgt: $\{p\} \in \mathcal{U}_{1+0} \setminus \mathcal{U}_0$.

`4.2:` Aus `3.2` "$x \in \mathcal{U}_0$" und
aus **240-2(RekParDef)** "$\mathcal{U}_0 = \{0\}$"
folgt: $x \in \{0\}$.

`5.1:` Aus `4.1` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $\{p\} \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`5.2:` Aus `4.2` "$x \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $x = 0$.

`6:` $\{p\} \cup x \stackrel{5.2}{=} \{p\} \cup 0 \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \{p\}$.

`7:` Aus `6` "$\{p\} \cup x = \ldots = \{p\}$" und
aus `5.1`
folgt: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

...

<u>Beweis **300-6**</u> `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (p \notin x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \wedge (p \text{ Menge})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $-1+n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **300-5**: $1+(-1+n) = n$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \ldots$" und
aus `2`
folgt: $p \notin x \in \mathcal{U}_{1+(-1+n)} \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`4:` Aus `1.2.Fall`"$-1+n \in \mathbb{N}$",
aus `3`"$p \notin x \in \mathcal{U}_{1+(-1+n)} \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **296-12**: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{2+(-1+n)} \setminus \mathcal{U}_{1+(-1+n)}$.

`5:` Via **300-5** gilt: $2+(-1+n) = 1+n$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{1+(-1+n)}$.

`7:` Aus `6` und
aus `2`
folgt: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{p\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

□

300-7. $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ nichtleer.

<u>**300-7(Satz)**</u>

a) *“$p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$” genau dann, wenn “$(p \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_p \setminus \mathcal{U}_{-1+p})$”.*

b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$.

c) $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$.

d) *Aus “$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$” folgt “$1 + n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$”.*

e) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} = \mathbb{N}$.

f) *Aus “$n \in \mathbb{N}$” folgt “$0 \neq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$”.*

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$ **300-4(Def)**

<u>Beweis **300-7**</u> a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

Aus VS
folgt: $(p \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_p \setminus \mathcal{U}_{-1+p})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_p \setminus \mathcal{U}_{-1+p})$.

1: Aus VS gleich “$p \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2: Aus VS gleich “$(p \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_p \setminus \mathcal{U}_{-1+p})$” und
aus 1 “p Menge”
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

b)

$\boxed{\text{Thema1}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.
Aus Thema1 “$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$”
folgt: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> **300-7** `c)`

`1.1:` Via **1-5** gilt: $0 \neq \{0\}$.

`1.2:` $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0} \stackrel{+\textbf{schola}}{=} \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1} \stackrel{\textbf{296-10(Def)}}{=} \mathcal{U}_0 \setminus 0 \stackrel{\textbf{5-11}}{=} \mathcal{U}_0 \stackrel{\textbf{240-2(RekParDef)}}{=} \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $0 \neq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$.

`3:` Via $\in$**schola** gilt: $0 \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`“$0 \in \mathbb{N}$” und
aus `2`“$0 \neq \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_{-1+0}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

.

<u>Beweis **300-7**</u> `d)` `VS` gleich $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$).

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$)"
folgt: $(n \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`2.1:` Aus `1`"$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots 0 \neq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

`2.3:` Aus `1`"$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + n) = n$.

`3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3`"Ω Menge"
folgt via **0-21**: $\exists \Phi : (\Phi \text{ Menge}) \wedge (\Phi \notin \Omega)$.

`5:` Aus `1`"$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `4`"$\ldots \Phi \notin \Omega$",
aus `2.2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$" und
aus `4`"$\ldots \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via **300-6**: $\{\Phi\} \cup \Omega \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`6:` Aus `5`"$\{\Phi\} \cup \Omega \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`7:` Aus `6` und
aus `2.3`
folgt: $0 \neq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)}$.

`8:` Aus `2.1`"$1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `7`"$0 \neq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+n)}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$1 + n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

<u>Beweis **300-7**</u> `e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$.

`Thema1.3` $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

Aus `Thema1.3` "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

Ergo `Thema1.3`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$"

`2:` Aus `1.1` "$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$",
aus `1.2` "$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\})$"
folgt via **236-5**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} = \mathbb{N}$.

`f)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\} = \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $n \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq \mathcal{U}_\omega \setminus \mathcal{U}_{-1+\omega})\}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 \neq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

□

300-8. Interessanter Weise ist auch Vorliegendes bislang nicht bewiesen worden.

300-8(Satz)

Aus “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$1 \leq 1 + n \in \mathbb{N}$”.

Beweis **300-8** `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”

folgt via **159-10**: $\boxed{1 + n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Via $\in$**schola** gilt: $1 \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.2`“$1 \in \mathbb{Z}$” und
aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”

folgt via **166-2**: $\boxed{1 \leq 1 + n}$

□

300-9. Es ist gelegentlich hilfreich, die Aussage $1 \leq n \in \mathbb{N}$ äquivalent formulieren zu können.

300-9(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

`ii)` $0 < n \in \mathbb{N}$.

`iii)` $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

`iv)` $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **300-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Via <**schola** gilt: $0 < 1$.

`2:` Aus `1.2`“$0 < 1$” und
aus `VS` gleich “$1 \leq n \ldots$”

folgt via **107-8**: $\boxed{0 < n}$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 < n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 < n \ldots$”

folgt via **41-3**: $\boxed{0 \neq n \in \mathbb{N}}$

<u>Beweis **300-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (-1 + n \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$0 \neq n \ldots$"
folgt: $-1 + n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2`"$-1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega = -1 + n) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $\Omega = -1 + n$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-5**: $1 + (-1 + n) = n$.

`5:` $n \stackrel{4}{=} 1 + (-1 + n) \stackrel{4.1}{=} 1 + \Omega$.

`6:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `5`"$n = \ldots = 1 + \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **300-8**: $1 \leq 1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

□

300-10. Mit dem vorliegenden Resultat wird zunächst ein wichtiger Beweisschrit für die Verifikation, dass $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Unmenge ist, vorweggenommen. Wie in **240-9** gesagt, ist $\mathcal{U}_n$ für $1 \leq n \in \mathbb{N}$ eine Unmenge. Nun wird fest gestellt, dass auch $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Unmenge ist. Damit ist der Nachweis erbracht, dass die Differenzklasse zweier Unmengen eine Unmenge sein kann. Interessanter Weise ist hier kein Induktions-Beweis notwendig.

300-10(Satz)

`a)` *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$0 \notin \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$".

`b)` *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$"
folgt "$(\{.\}.\mathsf{cup\_}x)[x^C] \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$".

`c)` *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ *Unmenge*".

`d)` *Aus* "$1 \leq n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ *Unmenge*".

Beweis **300-10** `a)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **240-5**: $0 \in \mathcal{U}_n$.

`2:` Aus `1`"$0 \in \mathcal{U}_n$"
folgt via **5-4**: $0 \notin \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

Beweis **300-10** `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in (\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[x^C]$.

`2:` Aus `Thema1`“ $\alpha \in (\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[x^C]$ ”
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in x^C) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x)$.

`3.1:` Aus 2“ $\ldots \Omega \in x^C \ldots$ ”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus 2“ $\ldots \Omega \in x^C \ldots$ ”
folgt via **3-2**: $\Omega \notin x$.

`3.3:` Aus 2“ $\ldots (\Omega, \alpha) \in \{.\}.\mathsf{cup}\_x$ ”
folgt via **300-1**: $\alpha = \{\Omega\} \cup x$.

`4:` Aus `VS` gleich “ $n \in \mathbb{N} \ldots$ ”,
aus `3.2`“ $\Omega \notin x$ ”,
aus `VS` gleich “ $\ldots x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ” und
aus `3.1`“ Ω Menge”
folgt via **300-6**: $\{\Omega\} \cup x \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`5:` Aus `3.3` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[x^C]) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_x)[x^C] \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`c)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **300-7**: $0 \neq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`2:` Aus `1`“ $0 \neq \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$.

`3.1:` Aus 2“ $\ldots \Omega \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `VS` gleich “ $n \in \mathbb{N}$ ” und
aus 2“ $\ldots \Omega \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_\Omega)[\Omega^C] \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$.

`4:` Aus `3.1`“ Ω Menge”
folgt via **300-3**: $(\{.\}.\mathsf{cup}\_\Omega)[\Omega^C]$ Unmenge.

`5:` Aus 4“ $(\{.\}.\mathsf{cup}\_\Omega)[\Omega^C]$ Unmenge” und
aus `3.2`“ $(\{.\}.\mathsf{cup}\_\Omega)[\Omega^C] \subseteq \mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ ”
folgt via **0-7**: $\mathcal{U}_{1+n} \setminus \mathcal{U}_n$ Unmenge.

<u>Beweis</u> **300-10** `d)` `VS` gleich $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$1 \leq n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

`2.1:` Aus `1` "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + \Omega) = \Omega$.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_\Omega$ Unmenge.

`2.3:` Aus `1`
folgt: $n = 1 + \Omega$.

`3:` $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} \stackrel{2.3}{=} \mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_{-1+(1+\Omega)} \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_\Omega$.

`4:` Aus `3` "$\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n} = \ldots = \mathcal{U}_{1+\Omega} \setminus \mathcal{U}_\Omega$" und
aus `2.2`
folgt: $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$ Unmenge.

$\square$

Mengenlehre: $\bigcup x$ injektiv, wenn x eine sse_Kette injektiver Klassen ist.
$\bigcup x$ Funktion, wenn x eine sse_Kette von Funktionen ist.
$\bigcup x$ Bijektion, wenn x eine sse_Kette von Bijektionen ist.

Ersterstellung: 02/07/14 **Letzte Änderung: 02/07/14**

301-1. Die generelle Frage der Fortsetzung von injektiven Mengen zu einer umfassenderen injektiven Menge erfährt durch vorliegendes Resultat neue Belebung. Die Voraussetzung "$\forall\alpha,\beta\in x:(\alpha\subseteq\beta)\vee(\beta\subseteq\alpha)$ ist unschwer als "x ist sse_Kette" erkennbar.

301-1(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\alpha$ *injektiv*$)$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow((\alpha\subseteq\beta)\vee(\beta\subseteq\alpha))$.

Dann folgt "$\bigcup x$ injektiv".

<u>Beweis **301-1**</u>

`Thema1` $(\gamma,\delta),(\epsilon,\delta)\in\bigcup x.$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$(\gamma,\delta)\ldots\in\bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega:(\gamma,\delta)\in\Omega\in x.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots(\epsilon,\delta)\in\bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists\Phi:(\epsilon,\delta)\in\Phi\in x.$

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots\Omega\in x$" und
aus →) "$\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\alpha$ injektiv$)$"
folgt: Ω injektiv.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots\Phi\in x$" und
aus →) "$\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\alpha$ injektiv$)$"
folgt: Φ injektiv.

`4:` Aus `2.1`"$\ldots\Omega\in x$" und
aus `2.2`"$\ldots\Phi\in x$" und
aus →) "$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow((\alpha\subseteq\beta)\vee(\beta\subseteq\alpha))$"
folgt: $(\Omega\subseteq\Phi)\vee(\Phi\subseteq\Omega).$
`Fallunterscheidung`

...

...

<u>Beweis **301-1**</u>

...

`Thema1` $(\gamma, \delta), (\epsilon, \delta) \in \bigcup x.$

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\Omega \subseteq \Phi.$

`5:` Aus `2.1`"$\ldots(\gamma, \delta) \in \Omega\ldots$" und
aus `4.1.Fall`"$\Omega \subseteq \Phi$"
folgt via **0-4**: $(\gamma, \delta) \in \Phi.$

`6:` Aus `3.2`"Φ injektiv",
aus `5`"$(\gamma, \delta) \in \Phi$)" und
aus `2.2`"$\ldots(\epsilon, \delta) \in \Phi\ldots$"
folgt via **8-1(Def)**: $\gamma = \epsilon.$

`4.2.Fall` $\Phi \subseteq \Omega.$

`5:` Aus `2.2`"$\ldots(\epsilon, \delta) \in \Phi\ldots$" und
aus `4.2.Fall`"$\Phi \subseteq \Omega$"
folgt via **0-4**: $(\epsilon, \delta) \in \Omega.$

`6:` Aus `3.1`"Ω injektiv",
aus `2.1`"$\ldots(\gamma, \delta) \in \Omega\ldots$" und
aus `5`"$(\epsilon, \delta) \in \Omega$"
folgt via **8-1(Def)**: $\gamma = \epsilon.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\gamma = \epsilon.$

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta, \epsilon : ((\gamma, \delta), (\epsilon, \delta) \in \bigcup x) \Rightarrow (\gamma = \epsilon)$

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\bigcup x$ injektiv.

$\square$

301-2. Die generelle Frage der Fortsetzung von Mengen, die Funktionen sind, zu einer umfassenderen Funktion erfährt durch vorliegendes Resultat neue Belebung. Die Voraussetzung "$\forall\alpha, \beta \in x : (\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$ ist unschwer als "x ist sse_Kette" erkennbar.

<u>**301-2(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \textit{ Funktion})$.

→) $\forall\alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Dann folgt "$\bigcup x$ Funktion".

<u>Beweis **301-2**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in x$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in x$" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$"
folgt: γ Funktion.

`3:` Aus 2"γ Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: γ Relation.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma$ Relation$)$.

Konsequenz via **10-9**: `A1` | "$\bigcup x$ Relation"

...

Beweis **301-2**

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\gamma,\delta),(\gamma,\epsilon)\in\bigcup x.$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$(\gamma,\delta)\ldots\in\bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists\Omega:(\gamma,\delta)\in\Omega\in x.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots(\gamma,\epsilon)\in\bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists\Phi:(\gamma,\epsilon)\in\Phi\in x.$

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots\Omega\in x$" und
aus →) "$\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\alpha$ Funktion$)$"
folgt: Ω Funktion.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots\Phi\in x$" und
aus →) "$\forall\alpha:(\alpha\in x)\Rightarrow(\alpha$ Funktion$)$"
folgt: Φ Funktion.

`4:` Aus `2.1`"$\ldots\Omega\in x$" und
aus `2.2`"$\ldots\Phi\in x$" und
aus →) "$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in x)\Rightarrow((\alpha\subseteq\beta)\vee(\beta\subseteq\alpha))$"
folgt: $(\Omega\subseteq\Phi)\vee(\Phi\subseteq\Omega).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

<u>Beweis **301-2**</u>

...

`Thema1.2` $(\gamma,\delta),(\gamma,\epsilon)\in\bigcup x.$

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\Omega\subseteq\Phi.$

5: Aus 2.1"... $(\gamma,\delta)\in\Omega$ ..." und
aus **4.1.Fall**"$\Omega\subseteq\Phi$"
folgt via **0-4**: $(\gamma,\delta)\in\Phi.$

6: Aus 3.2"Φ Funktion",
aus 5"$(\gamma,\delta)\in\Phi)$" und
aus 2.2"... $(\gamma,\epsilon)\in\Phi$ ..."
folgt via **18-18(Def)**: $\delta=\epsilon.$

`4.2.Fall` $\Phi\subseteq\Omega.$

5: Aus 2.2"... $(\gamma,\epsilon)\in\Phi$ ..." und
aus **4.2.Fall**"$\Phi\subseteq\Omega$"
folgt via **0-4**: $(\gamma,\epsilon)\in\Omega.$

6: Aus 3.1"Ω Funktion",
aus 2.1"... $(\gamma,\delta)\in\Omega$ ..." und
aus 5"$(\gamma,\epsilon)\in\Omega$"
folgt via **18-18(Def)**: $\delta=\epsilon.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\delta=\epsilon$

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall\gamma,\delta,\epsilon:((\gamma,\delta),(\gamma,\epsilon)\in\bigcup x)\Rightarrow(\delta=\epsilon)$"

1.3: Aus `A1` gleich "$\bigcup x$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall\gamma,\delta,\epsilon:((\gamma,\delta),(\gamma,\epsilon)\in\bigcup x)\Rightarrow(\delta=\epsilon)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\bigcup x$ Funktion.

□

301-3. Wenn unter den Voraussetzungen und mit den Notationen von **301-2** ein $p \in \mathsf{dom}\, f$ mit $f \in x$ vorliegt, dann gilt $f(p) = (\bigcup x)(p)$.

301-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ *Funktion*$)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow\!)$ $p \in \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow\!)$ $f \in x$.

Dann folgt "$f(p) = (\bigcup x)(p)$".

Beweis **301-3**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$f \in x$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$"
folgt: f Funktion.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup x$ Funktion.

`2:` Aus `1.2`"f Funktion" und
aus $\rightarrow\!)$ "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`3:` Aus `2`"$(p, f(p)) \in f$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$f \in x$"
folgt via **1-12**: $(p, f(p)) \in \bigcup x$.

`4:` Aus `1.2`"$\bigcup x$ Funktion" und
aus `3`"$(p, f(p)) \in \bigcup x$"
folgt via **18-20**: $f(p) = (\bigcup x)(p)$.

$\square$

301-4. Wenn unter den Voraussetzungen und mit den Notationen von **301-2** ein p mit $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup x)$ betrachtet wird, dann gibt es ein(e Funktion) $\Omega \in x$ mit $(\bigcup x)(p) = \Omega(p)$.

<u>**301-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \textit{ Funktion})$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

$\rightarrow\!)$ $p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup x)$.

Dann folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge ((\bigcup x)(p) = \Omega(p))$".

<u>Beweis **301-4**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup x$ Funktion.

2: Aus 1 "$\bigcup x$ Funktion" und
aus $\rightarrow\!)$ "$p \in \mathsf{dom}\,(\bigcup x)$"
folgt via **18-22**: $(p, (\bigcup x)(p)) \in \bigcup x$.

3: Aus 2 "$(p, (\bigcup x)(p)) \in \bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : (p, (\bigcup x)(p)) \in \Omega \in x$.

4: Aus 3 "$\ldots \Omega \in x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Funktion$)$"
folgt: Ω Funktion.

5: Aus 4 "Ω Funktion" und
aus 3 "$\ldots (p, (\bigcup x)(p)) \in \Omega \ldots$"
folgt via **18-20**: $(\bigcup x)(p) = \Omega(p)$.

6: Aus 3 "$\exists \Omega : \ldots \Omega \in x$" und
asu 5 "$(\bigcup x)(p) = \Omega(p)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge ((\bigcup x)(p) = \Omega(p))$.

□

301-5. Aussagen **301-1,2** lassen sich zu einer Aussage über Bijektionen kombinieren.

301-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ *Bijektion*$)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Dann folgt "$\bigcup x$ *Bijektion".*

Beweis **301-5**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in x$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\gamma \in x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Bijektion$)$"
folgt: γ Bijektion.

`3:` Aus 2"γ Bijektion"
folgt via **22-4**: γ Funktion.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma$ Funktion$)$"

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in x$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\gamma \in x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ Bijektion$)$"
folgt: γ Bijektion.

`3:` Aus 2"γ Bijektion"
folgt via **22-4**: γ injektiv.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma$ injektiv$)$"

...

<u>Beweis **301-5**</u>

...

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma \text{ Funktion})$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup x$ Funktion.

`1.4:` Aus `A2` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma \text{ injektiv})$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt via **301-1**: $\bigcup x$ injektiv.

`2:` Aus `1.3` "$\bigcup x$ Funktion" und
aus `1.4` "$\bigcup x$ injektiv"
folgt via **22-4**: $\bigcup x$ Bijektion.

□

Mengenlehre: $c\_M\_.,\phi$-rekursiv (mit Startwert $\{(p,q)\}$).

Ersterstellung: 02/07/14 **Letzte Änderung: 02/07/14**

302-1. Hier wird der abstrakte Grundstein zur Betrachtung "rekursiv definierter Klassen" gelegt.

302-1(Definition)

1) "R **ist** $c\_M\_.,\phi$**-rekursiv**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta:(((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in R)\wedge(((c,\alpha),\gamma)\in M))$$
$$\Rightarrow((\beta,\delta)\in\phi).$$

2) "R **ist** $c\_M\_.,\phi$**-rekursiv mit Startwert** (p,q)" genau dann, wenn gilt:

e1) R ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv.

e2) $(p,q)\in R$.

302-2. Ohne viel Federlesens wird die "maximale Fortsetzbarkeit" von $c\_M\_.,\phi$-rekursivem R vorbereitet.

<u>**302-2(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ *ist* $c\_M\_.,\phi$*-rekursiv*$)$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Dann folgt "$\bigcup x$ *ist* $c\_M\_.,\phi-$*rekursiv".*

<u>Beweis **302-2**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad ((\delta,\epsilon),(\xi,\eta) \in \bigcup x) \wedge (((c,\delta),\xi) \in M)$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$(\delta,\epsilon)\ldots \in \bigcup x \ldots$"
folgt via **1-12**: $\qquad \exists\Omega : (\delta,\epsilon) \in \Omega \in x$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots(\xi,\eta) \in \bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\qquad \exists\Phi : (\xi,\eta) \in \Phi \in x$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\ldots\Omega \in x$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$)$"
folgt: $\qquad \Omega$ ist c_M_-,ϕ-rekursiv.

`3.2:` Aus `2.2` "$\ldots\Phi \in x$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$)$"
folgt: $\qquad \Phi$ ist c_M_-,ϕ-rekursiv.

`4:` Aus `2.1` "$\ldots\Omega \in x$" und
aus `2.2` "$\ldots\Phi \in x$" und
aus $\rightarrow)$ "$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt: $\qquad (\Omega \subseteq \Phi) \vee (\Phi \subseteq \Omega)$.
$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

Beweis **302-2**

...

`Thema1` $$((\delta,\epsilon),(\xi,\eta)\in\bigcup x)\wedge(((c,\delta),\xi)\in M).$$

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\Omega\subseteq\Phi.$

`5:` Aus `2.1`"... $(\delta,\epsilon)\in\Omega$ ..." und
aus `4.1.Fall`"$\Omega\subseteq\Phi$"
folgt via **0-4**: $(\delta,\epsilon)\in\Phi.$

`6:` Aus `3.2`"Φ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv",
aus `5`"$(\delta,\epsilon)\in\Phi$",
aus `2.2`"... $(\xi,\eta)\in\Phi$ ..." und
aus `Thema1`"... $((c,\delta),\xi)\in M$"
folgt via **302-1(Def)**: $(\epsilon,\eta)\in\phi.$

`4.2.Fall` $\Phi\subseteq\Omega.$

`5:` Aus `2.2`"... $(\xi,\eta)\in\Phi$ ..." und
aus `4.2.Fall`"$\Phi\subseteq\Omega$"
folgt via **0-4**: $(\xi,\eta)\in\Omega.$

`6:` Aus `3.1`"Ω ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv",
aus `2.1`"... $(\delta,\epsilon)\in\Omega$ ...",
aus `5`"$(\xi,\eta)\in\Omega$" und
aus `Thema1`"... $((c,\delta),\xi)\in M$"
folgt via **302-1(Def)**: $(\epsilon,\eta)\in\phi.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\epsilon,\xi)\in\phi.$

Ergo `Thema1`:
$$\forall\delta,\epsilon,\xi,\eta:(((\delta,\epsilon),(\xi,\eta)\in\bigcup x)\wedge(((c,\delta),\xi)\in M))\Rightarrow((\epsilon,\eta)\in\phi)$$

Konsequenz via **302-1(Def)**: $\bigcup x$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv.

□

302-3. Es ist auch eine “Version mit Startwert” von **302-2** verfügbar.

<u>**302-3(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $0 \neq x$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ *ist* $c\_M\_\cdot, \phi$*-rekursiv mit Startwert* $(p, q))$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Dann folgt “$\bigcup x$ *ist* $c\_M\_\cdot, \phi-$*rekursiv mit Startwert* (p, q)”.

<u>Beweis **302-3**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ “$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv mit Startwert $(p, q))$”
folgt via **302-1(Def)**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv $)$.

2: Aus 1 “$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv $)$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$”
folgt via **302-2**: $\bigcup x$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv.

3: Aus $\rightarrow\!)$ “$0 \neq x$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

4: Aus 3 “$\ldots \Omega \in x$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv mit Startwert $(p, q))$”
folgt: Ω ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

5: Aus 4 “Ω ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)”
folgt via **302-1(Def)**: $(p, q) \in \Omega$.

6: Aus 5 “$(p, q) \in \Omega$” und
asu 3 “$\ldots \Omega \in x$”
folgt via **1-12**: $(p, q) \in \bigcup x$.

7: Aus 2 “$\bigcup x$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv” und
aus 6 “$(p, q) \in \bigcup x$”
folgt via **302-1(Def)**: $\bigcup x$ ist $c\_M\_\cdot, \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

$\square$

302-4. Es gibt "üblicher Weise" sehr viele, auch: "exotische", $c\_M\_\_,\phi$-rekursive Klassen (mit Startwert (p,q)). Hiervon soll Vorliegendes einen Eindruck vermitteln.

302-4(Satz)

a) 0 *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv.*

b) *Aus* "$x \subseteq R$ *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv" folgt* "x *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv".*

c) *Aus* "$(\mathsf{dom}\,R) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,M)) = 0$" *folgt* "$R$ *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv".*

d) *Aus* "$(\mathsf{dom}\,R) \cap (\mathsf{ran}\,M) = 0$" *folgt* "$R$ *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv".*

e) *Aus* "$((c,p),p) \notin M$" *folgt* "$\{(p,q)\}$ *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv".*

f) *Aus* "p,q *Menge" und* "$((c,p),p) \notin M$"
folgt "$\{(p,q)\}$ *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv mit Startwert* (p,q)".

g) *Aus* "$(p,q) \in x \subseteq R$ *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv"*
folgt "x *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv mit Startwert* (p,q)".

h) *Aus* "$(p,q) \in R$" *und* "$(\mathsf{dom}\,R) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,M)) = 0$"
folgt "R *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv mit Startwert* (p,q)".

i) *Aus* "$(p,q) \in R$" *und* "$(\mathsf{dom}\,R) \cap (\mathsf{ran}\,M) = 0$"
folgt "R *ist* $c\_M\_\_,\phi$*-rekursiv mit Startwert* (p,q)".

Beweis **302-4** a)

`Thema1` $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in 0) \wedge (((c,\alpha),\gamma) \in M)$.
Es gilt `Thema1` "$(\alpha,\beta)\ldots \in 0$".
Via **0-19** gilt "$(\alpha,\beta) \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(\beta,\delta) \in \phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta : (((\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in 0) \wedge (((c,\alpha),\gamma) \in M)) \Rightarrow ((\beta,\delta) \in \phi)$.

Konsequenz via **302-1(Def)**: 0 ist $c\_M\_\_,\phi$-rekursiv.

<u>Beweis **302-4**</u> `b)` `VS` gleich $x \subseteq R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in x)\wedge(((c,\alpha),\gamma)\in M)$.

`2:` Aus `Thema1`“$(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in x\ldots$” und
aus `VS` gleich “$x\subseteq R\ldots$”
folgt via **0-6**: $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in R$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\ldots R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv”,
aus 2“$(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in R$” und
aus `VS` gleich “$\ldots((c,\alpha),\gamma)\in\phi$”
folgt via **302-1(Def)**: $(\beta,\delta)\in\phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta:(((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in x)\wedge(((c,\alpha),\gamma)\in M))\Rightarrow((\beta,\delta)\in\phi)$.

Konsequenz via **302-1(Def)**: x ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv.

<u>Beweis **302-4**</u> `c)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\,R) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,M)) = 0.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in R) \wedge (((c,\alpha),\gamma) \in M).$

`2.1:` Aus `Thema1`“$(\alpha,\beta)\ldots \in R\ldots$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,R.$

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots((c,\alpha),\gamma) \in M$”
folgt via **7-5**: $(c,\alpha) \in \mathsf{dom}\,M.$

`3:` Aus `2.2`“$(c,\alpha) \in \mathsf{dom}\,M$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,M).$

`4:` Aus `2.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,R$” und
aus `3`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,M)$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\,R) \cap (\mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\,M)).$

`5:` Aus `4` und
aus `VS`
folgt: $\alpha \in 0.$

`6:` Es gilt `5`“$\alpha \in 0$”.
Via **0-19** gilt “$\alpha \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt $(\beta,\delta) \in \phi.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta : (((\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in x) \wedge (((c,\alpha),\gamma) \in M)) \Rightarrow ((\beta,\delta) \in \phi).$

Konsequenz via **302-1(Def)**: x ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv.

Beweis **302-4** `d)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{ran}\, M) = 0.$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in R) \wedge (((c,\alpha),\gamma) \in M).$

`2.1:` Aus `Thema1`“$(\gamma,\delta) \in R\ldots$”
folgt via **7-5**: $\gamma \in \mathsf{dom}\, R.$

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots((c,\alpha),\gamma) \in M$”
folgt via **7-5**: $\gamma \in \mathsf{ran}\, M.$

`3:` Aus `2.1`“$\gamma \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `2.2`“$\gamma \in \mathsf{ran}\, M$”
folgt via **2-2**: $\gamma \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{ran}\, M).$

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $\gamma \in 0.$

`5:` Es gilt `4`“$\gamma \in 0$”.
Via **0-19** gilt “$\gamma \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt $(\beta,\delta) \in \phi.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta : (((\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in x) \wedge (((c,\alpha),\gamma) \in M)) \Rightarrow ((\beta,\delta) \in \phi).$

Konsequenz via **302-1(Def)**: x ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

<u>Beweis **302-4**</u> `e)` `VS` gleich $((c,p),p)\notin M$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in\{(p,q)\})\wedge(((c,\alpha),\gamma)\in M)$.

`2.1`: Aus `Thema1`"$(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in\{(p,q)\}\ldots$"
folgt via **1-6**: $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)=(p,q)$.

`2.2`: Aus `Thema1`"$(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in\{(p,q)\}\ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)$ Menge.

`3.1`: Aus `2.1`"$(\alpha,\beta)\ldots=(p,q)$" und
aus `2.2`"$(\alpha,\beta)\ldots$ Menge"
folgt via **IGP**: $\alpha=p$.

`3.2`: Aus `2.1`"$\ldots(\gamma,\delta)=(p,q)$" und
aus `2.2`"$\ldots(\gamma,\delta)$ Menge"
folgt via **IGP**: $\gamma=p$.

`4`: Aus `3.1`"$\alpha=p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(c,\alpha)=(c,p)$.

`5`: Aus `4`"$(c,\alpha)=(c,p)$" und
aus `3.2`"$\gamma=p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((c,\alpha),\gamma)=((c,p),p)$.

`6`: Aus `5` und
aus `Thema1`"$\ldots((c,\alpha),\gamma)\in M$"
folgt: $((c,p),p)\in M$.

`7`: Es gilt `6`"$((c,p),p)\in M$".
Es gilt `VS` gleich "$((c,p),p)\notin M$".
Ex falso quodlibet folgt $(\beta,\delta)\in\phi$.

Ergo `Thema1`:
$$\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta:(((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in\{(p,q)\})\wedge(((c,\alpha),\gamma)\in M))\Rightarrow((\beta,\delta)\in\phi).$$

Konsequenz via **302-1(Def)**: $\{(p,q)\}$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv.

<u>Beweis **302-4**</u> `f)` `VS` gleich $(p, q \text{ Menge}) \wedge (((c, p), p) \notin M)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge…"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$((c, p), p) \notin M$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\{(p, q)\}$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`2:` Aus `1.1`"(p, q) Menge"
folgt via **1-3**: $(p, q) \in \{(p, q)\}$.

`3:` Aus `1.2`"$\{(p, q)\}$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv" und
aus `2`"$(p, q) \in \{(p, q)\}$"
folgt via **302-1(Def)**: $\{(p, q)\}$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

`g)` `VS` gleich $(p, q) \in x \subseteq R$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`1:` Aus `VS` gleich "…$x \subseteq R$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: x ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in x$…" und
aus `1`"x ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv"
folgt via **302-1(Def)**: x ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

`h)` `VS` gleich $((p, q) \in R) \wedge ((\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{ran}\, (\mathsf{dom}\, M)) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "…$(\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{ran}\, (\mathsf{dom}\, M)) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in R$…" und
aus `1`"R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv"
folgt via **302-1(Def)**: R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

`i)` `VS` gleich $((p, q) \in R) \wedge ((\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{ran}\, M) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "…$(\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{ran}\, M) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in R$…" und
aus `1`"R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv"
folgt via **302-1(Def)**: R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

□

302-5. Anhand der Impressionen von **302-4** erscheint es wenig zielführend allgemein nach “$\subseteq$-maximalen” $c\_M\_.,\phi$-rekursiven Klassen zu suchen. Wird jedoch die Klasse der in Frage kommenden $c\_M\_.,\phi$-rekursiven Klassen - eigentlich: Mengen - eingeschränkt, so ist die Ausgangslage überschaubarer.

302-5(Definition)

1) $\mathtt{302.0}(x,y,z,u) = \{\omega : (\omega \text{ ist } x\_y\_.,z\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

2) $\mathtt{302.1}(x,y,z,u,v)$
$$= \{\omega : (\omega \text{ ist } x\_y\_.,z\text{-rekursiv}\}) \wedge (u \subseteq \omega \subseteq v)\}.$$

302-6. Entweder ich habe etwas übersehen oder Vorliegendes ist tatsächlich noch nicht in **Suite I** bewiesen worden.

302-6(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow\!)$ *sse InklusionsRelation in* z.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` K *ist sse_Kette.*

`ii)` "$K \subseteq z$" *und* "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$".

Beweis **302-6** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich K ist *sse*_Kette.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "*sse* InklusionsRelation in z"
folgt via **68-6**: *sse* ist antiSymmetrische Halbordnung in z.

`2:` Aus `1` "*sse* ist antiSymmetrische Halbordnung in z"
folgt via **30-79(Def)**: *sse* Relation in z.

`3:` Aus `2` "*sse* Relation in z" und
aus `VS` gleich "K ist *sse*_Kette"
folgt via **34-4**: $\boxed{K \subseteq z}$

`Thema4` $\alpha, \beta \in K$.

`5:` Aus `VS` gleich "K ist *sse*_Kette" und
aus `Thema4` "$\alpha, \beta \in K$"
folgt via **30-68(Def)**: $(\alpha\_sse\_\beta) \vee (\beta\_sse\_\alpha)$.

`6:` Aus $\rightarrow\!)$ "*sse* InklusionsRelation in z" und
aus `5` "$(\alpha\_sse\_\beta) \vee (\beta\_sse\_\alpha)$"
folgt via **68-4**: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo `Thema4`: $\boxed{\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))}$

Beweis **302-6** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $(K \subseteq z) \wedge (\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)))$.

`Thema1` $\gamma, \delta \in K$.

2.1: Aus `Thema1` "$\gamma, \delta \in K$" und
aus `VS` gleich "$K \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $\gamma, \delta \in z$.

2.2: Aus `Thema1` "$\gamma, \delta \in K$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in K)$
$\Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt: $(\gamma \subseteq \delta) \vee (\delta \subseteq \gamma)$.

3: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in z",
aus 2.2 "$(\gamma \subseteq \delta) \vee (\delta \subseteq \gamma)$" und
aus 2.1 "$\gamma, \delta \in z$"
folgt via **68-4**: $(\gamma\_sse\_\delta) \vee (\delta\_sse\_\gamma)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta : (\gamma, \delta \in K) \Rightarrow ((\gamma\_sse\_\delta) \vee (\delta\_sse\_gmm))$.

Konsequenz via **30-68(Def)**: K ist *sse*_Kette.

□

302-7(AC). Ist u eine Menge, so gibt es in $\{\omega : (\omega \text{ ist } x\_y\_., z\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ ein "$\subseteq$-maximales Element" .

302-7(AC)(Satz)

*Aus "u Menge" folgt "$\exists \Omega : (\Omega \textit{ ist } c\_M\_., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \textit{ ist } c\_M\_., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$".*

Beweis **302-7(AC)** `VS` gleich u Menge.

$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ **302-5(Def)**

`Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.
Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt: $\alpha \subseteq u$.

Ergo `Thema1.1`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u).$$

Konsequenz via **0-29**: `A1` | "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"

`1.2`: Aus `VS` gleich "u Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(u)$ Menge.

`2`: Aus `A1` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$" und
aus `1.2` "$\mathcal{P}(u)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**:
`A2` | "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ Menge"

`3`: Via **68-2**:
$$\exists \Psi : \Psi \text{ InklusionsRelation in } \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}.$$

...

Beweis **302-7(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema4.1` α ist Ψ_Kette.

`5.1:` Aus `3`"...Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `Thema4.1`"α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`5.2:` Aus `3`"...Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `Thema4.1`"α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$.

`6.1:` Aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge(\omega \subseteq u)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge(\omega \subseteq u)\}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`6.2:` Aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge(\omega \subseteq u)\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge(\omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$.

`7.1:` Aus `6.1`"α Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \alpha$ Menge.

`7.2:` Aus `6.2`"$\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup \alpha \subseteq u$.

...

...

Beweis **302-7(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema4.1` α ist Ψ_Kette.

...

`Thema8.1` $\delta \in \alpha$.

`9:` Aus `Thema8.1` "$\delta \in \alpha$" und
aus `5.1` "$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`10:` Aus `9`
folgt: δ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

Ergo `Thema8.1`: `A3` | "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$"

`8.2:` Aus `A3` gleich "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$" und
aus `5.2` "$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **302-2**: $\bigcup \alpha$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`9:` Aus `8.2` "$\bigcup \alpha$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv",
aus `7.2` "$\bigcup \alpha \subseteq u$" und
aus `7.1` "$\bigcup \alpha$ Menge"
folgt: $\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

Ergo `Thema4.1`:

`A4` | "$\forall \alpha : (\alpha \text{ ist } \Psi\text{\_Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\})$"

...

Beweis **302-7(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`4.2:` Aus `3`"... Ψ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge(\omega \subseteq u)\}$",
aus `2`"$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ Menge" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \text{ ist } \Psi\_\text{Kette})$
$\Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\})$"
folgt via **Lemma von Zorn I, TeilMengenVersion**:
$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \Psi\_\text{maximales Element von}$
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`5:` Aus `4.2`"... Ω ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **39-1(Def)**: $\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`6:` Aus `5`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt:
$(\Omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq u)$.

...

Beweis **302-7(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema7.1` $(\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

8: Aus `Thema7.1`"$\ldots \alpha \subseteq u$" und
aus `VS` gleich "u Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

9: Aus `Thema7.1`"$(\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\ldots \alpha \subseteq u)$" und
aus 8"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

10: Aus 3"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$",
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$",
aus 5"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus 9"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **68-4**: Ω_Ψ_α.

11: Aus 4.2"$\ldots \Omega$ ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$",
aus 9"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus 10"Ω_Ψ_α"
folgt via **39-1(Def)**: α_Ψ_Ω.

12: Aus 3"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus 11"α_Ψ_Ω"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

13: Aus 12"$\alpha \subseteq \Omega$" und
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \Omega$.

Ergo `Thema7.1`:

`A5` "$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"

...

Beweis **302-7(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`7.2:` Aus `4.2`“$\exists\Omega \ldots$”,
aus `6`“$(\Omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq u)$” und
aus `A5` gleich “$\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$”
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$

$\square$

302-8(AC). Vermutlich ist die "$\neq 0$-Version" vom **Lemma von Zorn I** deswegen nicht in **Suite I** zu finden, weil mir dort diese Folgerung als zu offensichtlich erschien.

302-8(AC)(Satz) (Lemma von Zorn I*)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\preceq$ *Halbordnung in* z.

$\rightarrow)$ $0 \neq z$ *Menge.*

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : (0 \neq \alpha$ *ist* $\preceq$ *-Kette*$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ *obere* $\preceq$ *-Schranke von* $\alpha)$.

Dann folgt "$\exists \Psi : \Psi$ *ist* $\preceq$ *-maximales Element von* z".

Beweis **302-8(AC)**

`Thema1.1` β ist $\preceq$ _Kette.

`2:` Es gilt: $(\beta = 0) \vee (0 \neq \beta)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta = 0$.

`3.1:` Aus →) "$0 \neq z$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in z$.

`3.2:` Aus →) "$\preceq$ Halbordnung in z"
folgt via **30-79(Def)**:
$(\preceq$ Relation in $z) \wedge (\preceq$ reflexiv in $z)$.

`4:` Aus `3.2`"$(\preceq$ Relation in $z) \wedge (\preceq$ reflexiv in $z)$" und
aus `3.1`"$\ldots \Omega \in z$"
folgt via **43-5**: Ω obere $\preceq$ _Schranke von 0.

`5:` Aus 4 und
aus `2.1.Fall`
folgt: Ω obere $\preceq$ _Schranke von β.

`6:` Aus `3.1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus 5"Ω obere $\preceq$ _Schranke von β"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von β.

`2.2.Fall` $0 \neq \beta$.

Aus `2.2.Fall`"$0 \neq \beta$" und
aus `Thema1.1`"β ist $\preceq$ _Kette",
aus →)"$\forall \alpha : (0 \neq \alpha$ ist $\preceq$ _Kette)
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von $\alpha)$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von β.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von β.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	"$\forall \beta : (\beta$ ist $\preceq$ _Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von $\beta)$"

...

Beweis **302-8(AC)** ...

`1.2:` Aus $\rightarrow\!\!)$ "$\preceq$ Halbordnung in z",
aus $\rightarrow\!\!)$ "$\ldots z$ Menge" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta$ ist $\preceq$ _Kette$) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ obere $\preceq$ _Schranke von $\beta)$"
folgt via **Lemma von Zorn I**:

$\exists\Psi : \Psi$ ist $\preceq$ _maximales Element von z.

$\square$

302-9(AC). Auch die "$\neq 0$-Version" vom **Lemma von Zorn I, TeilMengen-Version** erscheint nicht in **Suite I**. Vermutlich aus den gleichen Gründen, die vorab zu **302-8(AC)** angeführt sind.

302-9(AC)(Satz) (Lemma von Zorn I*, TeilMengenVersion)

Es gelte:

$\rightarrow$) *sse InklusionsRelation in z.*

$\rightarrow$) $0 \neq z$ *Menge.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (0 \neq \alpha$ *ist sse_Kette*$) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in z)$.

Dann folgt "$\exists \Psi : \Psi$ ist sse_maximales Element von z".

Beweis **302-9(AC)**

1: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in z"
folgt via **68-6**: *sse* antiSymmetrische Halbordnung in z.

2: Aus 1 "*sse* antiSymmetrische Halbordnung in z"
folgt via **34-13**: (sse Halbordnung in z) $\wedge$ (sse Relation in z).

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $0 \neq \beta$ ist *sse*_Kette.

4.1: Aus Thema3.1 "... β ist *sse*_Kette" und
aus 2 "... *sse* Relation in z"
folgt via **34-4**: $\beta \subseteq z$.

4.2: Aus Thema3.1 "$0 \neq \beta$ ist *sse*_Kette" und
aus →) "$\forall \alpha : (0 \neq \alpha$ ist sse_Kette$) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in z)$"
folgt: $\bigcup \beta \in z$.

5: Aus →) "*sse* InklusionsRelation in z",
aus 4.2 "$\bigcup \beta \in z$" und
aus 4.1 "$\beta \subseteq z$"
folgt via **68-15**: $\bigcup \beta$ obere *sse*_Schranke von β.

6: Aus Thema3.1 "... β ist *sse*_Kette"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = \bigcup \beta$.

7: Aus 6 "... $\Omega = \bigcup \beta$" und
aus 5
folgt: Ω obere *sse*_Schranke von β.

8: Aus 6 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 7 "Ω obere *sse*_Schranke von β"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ obere *sse*_Schranke von β.

Ergo Thema3.1:

A1	"$\forall \beta : (0 \neq \beta$ ist sse_Kette$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ obere sse_Schranke von $\beta)$"

3.2: Aus 2 "*sse* Halbordnung in z ...",
aus →) "$0 \neq z$ Menge" und
aus A1 gleich "$\forall \beta : (0 \neq \beta$ ist sse_Kette$)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ obere sse_Schranke von $\beta)$"
folgt via **Lemma von Zorn I***:
$\exists \Psi : \Psi$ ist *sse*_maximales Element von z.

□

302-10(AC). Falls v überhaupt eine $c\_M\_.,\phi$-rekursive Fortsetzung R mit $(v \subseteq)R \subseteq u$, u Menge, hat, so gibt es in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ ein "$\subseteq$-maximales Element", also eine "$\subseteq$-maximale" $c\_M\_.,\phi$-Fortsetzung von v, die eine TeilKlasse von u ist.

302-10(AC)(Satz)

Aus "u Menge" und "$v \subseteq R \subseteq u$" und "$R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } c\_M\_.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } c\_M\_.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv})$.

$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ **302-5(Def)**

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots R \subseteq u \ldots$" und
aus `VS` gleich "u Menge..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: R Menge.

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv",
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq R \subseteq u \ldots$" und
aus `1.1`"R Menge"
folgt: $R \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`3`: Aus `2`"$R \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-20**: `A1` | "$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
Aus `Thema1.2` folgt: $\alpha \subseteq u$.

Ergo `Thema1.2`:
$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$.

Konsequenz via **0-29**:
`A2` | "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"

...

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

`1.3:` Aus `VS` gleich "u Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(u)$ Menge.

`2:` Aus `A2` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"
und
aus `1.3`"$\mathcal{P}(u)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**:

`A3`	"$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge"

`3:` Via **68-2**:
$$\exists \Psi : \Psi \text{ InklusionsRelation in } \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

...

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

`5.1:` Aus `Thema4.1`"$0 \neq \alpha \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \alpha$.

`5.2:` Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `Thema4.1`"$\ldots \alpha$ ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`5.3:` Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `Thema4.1`"$\ldots \alpha$ ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$.

`6.1:` Aus `5.1`"$\ldots \Omega \in \alpha$"
folgt via **1-15**: $\Omega \subseteq \bigcup \alpha$.

`6.2:` Aus `5.1`"$\Omega \in \alpha$" und
aus `5.2`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`6.3:` Aus `5.2`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `A3` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`6.4:` Aus `5.2`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$.

...

...

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

`Thema4.1` $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`7.1:` Aus `6.2`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt: $v \subseteq \Omega$.

`7.2:` Aus `6.3`"α Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \alpha$ Menge.

`7.3:` Aus `6.4`"$\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup \alpha \subseteq u$.

`Thema8.1` $\delta \in \alpha$.

`9:` Aus `Thema8.1`"$\delta \in \alpha$" und
aus `5.2`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

`10:` Aus `9`
folgt: δ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

Ergo `Thema8.1`:

`A4`	"$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$"

...

...

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`8.2:` Aus `A4` gleich "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$" und
aus `5.3`"$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **302-2**: $\bigcup \alpha$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv.

`8.3:` Aus `7.1`"$v \subseteq \Omega$" und
aus `6.1`"$\Omega \subseteq \bigcup \alpha$"
folgt via **0-6**: $v \subseteq \bigcup \alpha$.

`9:` Aus `8.2`"$\bigcup \alpha$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv",
aus `8.3`"$v \subseteq \bigcup \alpha$",
aus `7.3`"$\bigcup \alpha \subseteq u$" und
aus `7.2`"$\bigcup \alpha$ Menge"
folgt:
$$\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

Ergo `Thema4.1`:

`A5`	"$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \text{ ist } \Psi\_\text{Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$"

`4.2:` Aus `3`"... Ψ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$",
aus `A1` gleich "$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$",
aus `A3` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge" und
aus `A5` gleich "$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \text{ ist } \Psi\_\text{Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$"
folgt via **Lemma von Zorn I*, TeilMengenVersion**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

...

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

`5`: Aus `4.2`"... Ω ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **39-1(Def)**: $\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`6`: Aus `5`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt: $(\Omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$.

`Thema7.1` $(\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

`8.1`: Aus `6`"... $v \subseteq \Omega$ ..." und
aus `Thema7.1`"... $\Omega \subseteq \alpha$ ..."
folgt via **0-6**: $v \subseteq \alpha$.

`8.2`: Aus `Thema7.1`"... $\alpha \subseteq u$" und
aus `VS` gleich "u Menge..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`9`: Aus `Thema7.1`"α ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv...",
aus `8.1`"$v \subseteq \alpha$",
aus `Thema7.1`"... $\alpha \subseteq u$" und
aus `8.2`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`10`: Aus `3`"... Ψ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$",
aus `Thema7.1`"... $\Omega \subseteq \alpha$ ...",
aus `5`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `9`"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **68-4**: Ω_Ψ_α.

...

...

Beweis **302-10(AC)**
`VS` gleich $(u \text{ Menge}) \wedge (v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema7.1}}$ $(\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

...

`11:` Aus `4.2`"$\ldots \Omega$ ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$",
aus `9`"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `10`"Ω_Ψ_α"
folgt via **39-1(Def)**: α_Ψ_Ω.

`12:` Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}\}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `11`"α_Ψ_Ω"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

`13:` Aus `12`"$\alpha \subseteq \Omega$" und
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \Omega$.

Ergo `Thema7.1`:

`A6`	"$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"

`7.2:` Aus `4.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `6`"$(\Omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$" und
aus `A6` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

□

302-11(AC). Durch Spezialisierung auf $u = R$ ergibt sich aus **302-10(AC)** der angekündigte "$\subseteq$-maximale Erweiterungssatz für $c\_M\_., \phi$-rekursive Klassen.

302-11(AC)(Satz)

Aus "u Menge" und "$R \subseteq u$" und "R ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega$ *ist* $c\_M\_., \phi$*-rekursiv*$) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha$ *ist* $c\_M\_., \phi$*-rekursiv*$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **302-11(AC)** `VS` gleich $(u$ Menge$) \wedge (R \subseteq u) \wedge (R$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv$)$.

`1`: Via **0-6** gilt: $R \subseteq R$.

`2`: Aus `VS` gleich "u Menge…",
aus `1` "$R \subseteq R$" und
aus `VS` gleich "… $(R \subseteq u) \wedge (R$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv$)$"
folgt via **302-10(AC)**: $\exists\Omega : (\Omega$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv$) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha$ ist $c\_M\_., \phi$-rekursiv$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

□

302-12(AC). Mit ein wenig Geschick ergibt sich aus **302-10(AC)** in weiterer Folge ein "$\subseteq$-maximaler" Erweiterungssatz für $c\_M\_.,\phi$-rekursive Klassen mit Startwert (p,q). Zunächst wird Vorliegendes notiert.

302-12(AC)(Satz)

Aus "u Menge" und "$(p,q) \in v \subseteq R \subseteq u$" und "$R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv" folgt "$\exists \Omega : (\Omega$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Starwert $(p,q)) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$ $\wedge(\forall \alpha : ((\alpha$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **302-12(AC)**

`VS` gleich $(u$ Menge$) \wedge ((p,q) \in v \subseteq R \subseteq u) \wedge (R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$)$.

`1`: Aus `VS` gleich "u Menge..." ,
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq R \subseteq u \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv"
folgt via **302-10(AC)**: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in v \ldots$" und
aus `1` "$\ldots v \subseteq \Omega \ldots$"
folgt via **0-4**: $(p,q) \in \Omega$.

`3`: Aus `1` "$\ldots \Omega$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv..." und
aus `2` "$(p,q) \in \Omega$"
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q).

`4`: Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$" ,
aus `3` "Ω ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q)" ,
aus `1` "$\ldots v \subseteq \Omega \subseteq u \ldots$" und
aus `1` "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(p,q)) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

$\square$

302-13(AC). Der Satz über die "$\subseteq$-maximale" Erweiterung einer $c\_M\_.,\phi$-rekursiven Klasse R mit Startwert (p,q) ergibt sich als Folgerung von **302-12(AC)**.

302-13(AC)(Satz)

Aus "u Menge" und "$R \subseteq u$"
und "R ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q)"
folgt "$\exists\Omega : (\Omega$ *ist* $c\_M\_.,\phi$-*rekursiv mit Starwert* $(p,q)) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha$ *ist* $c\_M\_.,\phi$-*rekursiv*$) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **302-13(AC)**
`VS` gleich $(u$ Menge$) \wedge (R \subseteq u) \wedge (R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert$(p,q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q)"
folgt via **302-1(Def)**: $(R$ ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$) \wedge ((p,q) \in R)$.

`1.2:` Via **0-6** gilt: $R \subseteq R$.

`2:` Aus `VS` gleich "u Menge$\ldots$",
aus `1.1`"$\ldots (p,q) \in R$",
aus `1.2`"$R \subseteq R$",
aus `VS` gleich "$\ldots R \subseteq u \ldots$" und
aus `1.1`"R ist $c\_M\_.,\phi$-rekursiv$\ldots$"
folgt via **302-12(AC)**:

$$\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv mit Startwert } (p,q)) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_M\_.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

$\square$

EK: $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$ mit $c \in \,]-1|1[$.

Ersterstellung: 10/07/14 **Letzte Änderung: 10/07/14**

Ziel. Für die Gleichung $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$ mit $c \in \,]-1|1[$ sollen "Lösungskurven" $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gefunden werden, so dass gilt:

1) Für alle $t \in \mathbb{R}$ "erfüllen $l_1(t), l_2(t)$ die Gleichung $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$", i.e. es soll

$$l_1^2(t) + 2cl_1(t)l_2(t) + l_2^2(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

gelten.

2) Es soll festgestellt werden, dass es zu jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+2cxy+y^2 = 1$ (wenigstens) ein $\tau^* \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$l(\tau^*) = (x, y), \quad \text{i.e.} \quad x = l_1(\tau^*), \quad y = l_2(\tau^*).$$

Der Fall $c = 0$. In diesem Fall ist die "Kreisgleichung"

$$x^2 + y^2 = 1,$$

zu untersuchen. Mit Hilfe des Formelwissens

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

liegt es nahe,

$$l_1(t) = \cos t, \quad l_2(t) = \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

zu setzen. Dann ist jedenfalls `1)` erfüllt. Zum Nachweis von `2)` sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Dann gilt auf jeden Fall $x^2, y^2 \leq 1$ und es folgt $|x|, |y| \leq 1$. Also gibt es - außer im Fall $x = \pm 1$ - im Intervall $[0|2\pi[$ *genau zwei* Zahlen τ^* mit $\cos \tau^* = x$, nämlich

$$\tau^* = \arccos x, \quad \text{oder} \quad \tau^* = 2\pi - \arccos x,$$

im Fall $x = 1$ gibt es *genau ein* $\tau^* \in [0|2\pi[$ mit $\cos \tau^* = x$, nämlich $\tau^* = 0$, im Fall $x = -1$ gibt es *genau ein* $\tau^* \in [0|2\pi[$ mit $\cos \tau^* = x$, nämlich $\tau^* = \pi$. Falls nun $x \neq \pm 1$, so muss wegen $x^2 + y^2 = 1$ die Aussage $0 \neq y$ gelten und das *Vorzeichen* von y entscheidet über die richtige Wahl von τ^*:

- `a)` $x \neq \pm 1$ und $0 < y$: $\tau^* = \arccos x \in]0|\pi[$.
- `b)` $x \neq \pm 1$ und $y < 0$: $\tau^* = 2\pi - \arccos x \in]\pi|2\pi[$.
- `c)` $x = 1$: $\tau^* = 0$.
- `d)` $x = -1$: $\tau^* = \pi$.

In jedem Fall muss $y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \tau^*} = \pm|\sin \tau^*|$ gelten. Entsprechend der Berücksichtigung des Vorzeichens von y bei der Wahl von τ^* *und weil* sin *auf* $]0|\pi[$ *positiv und auf* $]\pi|2\pi[$ *negativ ist*, ergibt sich $y = \sin \tau^*$.

Konsequenz: Zu jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es ein $\tau^* \in \mathbb{R}$ mit $x = \cos \tau^* = l_1(\tau^*)$, $y = \sin \tau^* = l_2(\tau^*)$.

Der “ allgemeine ” Fall $c \in \left]-1|1\right[$**.** Hier ist $c = 0$ miteingeschlossen. Bei der Diskussion wird von den Erkenntnissen des vorab untersuchten Falls $c = 0$ Gebrauch gemacht. Um überhaupt eine Idee für die Vorgehensweise zu kriegen wird zunächst von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$ ausgegangen und es wird die (in der Linearen Algebra zu besprechende Hauptachsen-)Transformation

$$x = u + v, \quad y = u - v,$$

betrachtet. Es gilt

$$u = (x + y) : 2, \quad v = (x - y) : 2,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} 1 = x^2+2cxy+y^2 = (u+v)^2+2c(u+v)(u-v)+(u-v)^2 &= 2u^2+2v^2+2c(u^2-v^2) \\ &= 2(1 + c)u^2 + 2(1 - c)v^2, \end{aligned}$$

wobei wir

$$0 < 1 \pm c < 2,$$

fest stellen, woraus $2(1 \pm c) = (\sqrt{2(1 \pm c)})^2$ folgt. Wir erhalten

$$1 = 2(1 + c)u^2 + 2(1 - c)v^2 = (\sqrt{2(1 + c)}\ u)^2 + (\sqrt{2(1 - c)}\ v)^2,$$

so dass es entsprechend der Untersuchungen im Fall $c = 0$ ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{2(1 + c)}\ u = \cos\tau, \quad \sqrt{2(1 - c)}\ v = \sin\tau,$$

gibt. Es folgt

$$x = (\cos\tau) : \sqrt{2(1 + c)} + (\sin\tau) : \sqrt{2(1 - c)},$$

und

$$y = (\cos\tau) : \sqrt{2(1 + c)} - (\sin\tau) : \sqrt{2(1 - c)},$$

und damit ist zumindest ein Ansatz für eine “Lösungsformel” gefunden. Jedoch ist es nicht zufrieden stellend, dass hier im Fall $c = 0$ *nicht* die vorab besprochene Darstellung erscheint. Die Formeln

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \sin\beta + \sin\alpha\ \cos\beta,$$

geben einen Hinweis. Zunächst berechnen wir

$$(\sqrt{2(1 + c)})^2 + (\sqrt{2(1 - c)})^2 = 2(1 + c) + 2(1 - c) = 4,$$

schließen hieraus

$$(\sqrt{(1 + c) : 2})^2 + (\sqrt{(1 - c) : 2})^2 = (1 + c) : 2 + (1 - c) : 2 = 1,$$

und erkennen, dass es

$$\delta_c \in \mathbb{R},$$

mit

$$\cos\delta_c = \sqrt{(1+c):2}, \quad \sin\delta_c = \sqrt{(1-c):2},$$

geben muss. Wegen der Positivität von $1 \pm c$ kann etwa

$$\delta_c = \arctan\sqrt{(1-c):(1+c)} \in \,]0|\pi:2[,$$

gewählt werden. Offenbar gilt

$$\delta_0 = \pi : 4.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x = (\cos\tau) : (2\cos\delta_c) + (\sin\tau) : (2\sin\delta_c) \\ = (\cos\tau\sin\delta_c + \sin\tau\cos\delta_c) : (2\sin\delta_c\cos\delta_c) \\ = \sin(\tau+\delta_c) : (2\sqrt{(1-c):2}\sqrt{(1+c):2}) = \sin(\tau+\delta_c) : \Delta_c, \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta_c = \sqrt{1-c^2},$$

mit

$$\Delta_0 = 1.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$y = \sin(\tau - \delta_c) : \Delta_c.$$

Noch immer ist die Form für $c = 0$ nicht direkt sichtbar. Es soll versucht werden, $\delta_0 = \pi : 4$ auszunützen. Wir setzen

$$\epsilon_c = \delta_c - \pi : 4,$$

woraus im Speziellen

$$\epsilon_0 = 0,$$

folgt. Nun wird gerechnet:

$$\begin{aligned} x = \sin(\tau+\delta_c) : \Delta_c = \sin((\tau+\pi:4)+(\delta_c-\pi:4)) : \Delta_c = \sin((\tau+\pi:4)+\epsilon_c) : \Delta_c \\ = \big(\cos(\tau+\pi:4)\cdot\sin\epsilon_c + \sin(\tau+\pi:4)\cdot\cos\epsilon_c\big) : \Delta_c, \end{aligned}$$

und ähnlich folgt

$$y = \big(-\cos(\tau-\pi:4)\cdot\sin\epsilon_c + \sin(\tau-\pi:4)\cdot\cos\epsilon_c\big) : \Delta_c,$$

woraus sich im Fall $c = 0$ die Darstellung

$$x = \sin(\tau+\pi:4), \quad y = \sin(\tau-\pi:4)$$

ergibt und es scheint an der Zeit, von

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi : 2),$$

$$\cos(\alpha + \pi : 2) = -\sin\alpha,$$

Gebrauch zu machen. Es folgt im Speziellen

$$\sin(\tau + \pi : 4) = \cos(\tau - \pi : 4),$$

$$\cos(\tau + \pi : 4) = -\sin(\tau - \pi : 4),$$

und somit

$$x = \big(\cos(\tau - \pi : 4) \cdot \cos\epsilon_c - \sin(\tau - \pi : 4) \cdot \sin\epsilon_c\big) : \Delta_c,$$

$$y = \big(\sin(\tau - \pi : 4) \cdot \cos\epsilon_c - \cos(\tau - \pi : 4) \cdot \sin\epsilon_c\big) : \Delta_c.$$

Hieraus folgt

$$x = (\cos(\tau - \pi : 4 + \epsilon_c)) : \Delta_c, \quad y = (\sin(\tau - \pi : 4 - \epsilon_c)) : \Delta_c,$$

woraus sich mit

$$\tau^* = \tau - \pi : 4,$$

die Darstellung

$$x = (\cos(\tau^* + \epsilon_c)) : \Delta_c, \quad y = (\sin(\tau^* - \epsilon_c)) : \Delta_c,$$

ergibt. Diese Voruntersuchungen legen es nahe, die Kurve $l_c = (l_{1,c}, l_{2.c})$ mit

$$l_{1,c}(t) = (\cos(t + \epsilon_c)) : \Delta_c, \quad l_{2,c}(t) = (\sin(t - \epsilon_c)) : \Delta_c, \quad t \in \mathbb{R},$$

genauer zu untersuchen. Gemäß des bisher Gefundenen gibt es jedenfalls zu jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$ (wenigstens) ein $\tau^* \in \mathbb{R}$ mit $l(\tau^*) = (x, y)$. Dies erledigt `2)`. Zum Nachweis von `1)` stellen wir zunächst

$$\begin{aligned}\cos\epsilon_c = \cos(\delta_c - \pi : 4) &= \cos\delta_c\ \cos(\pi : 4) + \sin\delta_c\ \sin(\pi : 4)\\ &= (1 : \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{(1 + c) : 2} + \sqrt{(1 - c) : 2}) = (\sqrt{1 + c} + \sqrt{1 - c}) : 2,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin\epsilon_c = \sin(\delta_c - \pi : 4) &= \sin\delta_c\ \cos(\pi : 4) - \cos(\delta_c)\ \sin(\pi : 4)\\ &= (1 : \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{(1 - c) : 2} - \sqrt{(1 + c) : 2})\\ &= (\sqrt{1 + c} - \sqrt{1 - c}) : 2,\end{aligned}$$

fest, woraus ohne viel Weiteres

$$\cos\epsilon_c\ \sin\epsilon_c = ((\sqrt{1 + c})^2 - (\sqrt{1 - c})^2) : 4 = (1 + c - 1 + c) : 4 = c : 2,$$

folgt. Nun wird für $t \in \mathbb{R}$ gerechnet: ...

$$l_{1,c}^2(t) + 2cl_{1,c}(t)l_{2,c}(t) + l_{2,c}^2(t)$$

$$= (\cos^2(t+\epsilon_c)) : \Delta_c^2 + 2c(\cos(t+\epsilon_c))(\sin(t-\epsilon_c)) : \Delta_c^2 + (\sin^2(t-\epsilon_c)) : \Delta_c^2$$

$$= (1 : \Delta_c^2) \cdot \big((\cos t \cdot \cos\epsilon_c - \sin t \cdot \sin\epsilon_c)^2$$
$$+ 2c(\cos t\cos\epsilon - \sin t\sin\epsilon)(\sin t\cos\epsilon_c - \cos t\sin\epsilon_c) + (\sin t\cos\epsilon_c - \cos t\sin\epsilon_c)^2\big)$$

$$= (1 : \Delta_c)^2 \cdot \big(\cos^2 t\cos^2\epsilon_c - 2\cos t\sin t\cos\epsilon_c\sin\epsilon_c + \sin^2 t\sin^2\epsilon_c$$
$$+ 2c(\cos t\sin t\cos^2\epsilon_c - \cos^2 t\cos\epsilon_c\sin\epsilon_c - \sin^2 t\cos\epsilon_c\sin\epsilon_c + \cos t\sin t\sin^2\epsilon_c)$$
$$+ \sin^2 t\cos^2\epsilon_c - 2\cos t\sin t\cos\epsilon_c\sin\epsilon_c + \cos^2 t\sin^2\epsilon_c\big)$$

$$= (1 : \Delta_c^2) \cdot \big(\cos^2\epsilon_c + \sin^2\epsilon_c - 4\cos t\sin t\cos\epsilon_c\sin\epsilon_c + 2c(\cos t\sin t - \cos\epsilon_c\sin\epsilon_c)\big)$$

$$= (1 : \Delta_c^2) \cdot \big(1 - (4c : 2)\cos t\sin t + 2c\cos t\sin t - 2c \cdot (c : 2)\big)$$

$$= (1 : (1-c^2)) \cdot (1-c^2) = 1,$$

so dass auch `1)` erfüllt ist.

Der Grenzübergang $c \uparrow 1$. Wird in der Gleichung $x^2 + 2cxy + y^2 = 1$ der Grenzübergang $c \uparrow 1$ durchgeführt, so folgt $(x+y)^2 = 1$, also $x + y = \pm 1$. Wird hingegen der Grenzübergang $c \uparrow 1$ in $l_c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, betrachtet, so folgt wegen

$$\Delta_c \to 0 \quad \text{für} \quad c \uparrow 1,$$

die Aussage

$$|l_{1.c}(t)| \to +\infty \quad \text{oder} \quad |l_{2,c}(t)| \to +\infty \quad \text{für} \quad c \uparrow 1,$$

so dass $l_c(t)$ nicht geeignet ist, die Grenzgleichung zu parametrisieren. Nichtsdestotrotz berechnen wir für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$l_{1,c}(t) + l_{2,c}(t) = (\cos(t+\epsilon_c) + \sin(t-\epsilon_c)) : \Delta$$

$$= (\cos t\cos\epsilon_c - \sin t\sin\epsilon_c + \sin t\cos\epsilon_c - \cos t\sin\epsilon_c) : \Delta_c$$

$$= \big(\cos t \cdot (\cos\epsilon_c - \sin\epsilon_c) + \sin t(\cos\epsilon_c - \sin\epsilon_c)\big) : \Delta_c$$

$$= (\cos t + \sin t) \cdot (\cos\epsilon_c - \sin\epsilon_c) : \Delta_c$$

$$= (\cos t + \sin t) \cdot \sqrt{1-c} : \Delta_c = (\cos t + \sin t) : \sqrt{1+c},$$

so dass

$$l_{1,c}(t) + l_{2,c}(t) \to (\cos t + \sin t) : \sqrt{2} \in [\,-1|1] \quad \text{für} \quad c \uparrow 1,$$

und demnach $l_{1.c}(t)+l_{2,c}(t)$ je nach der Wahl von t gegen einen Wert im Intervall $[-1|1]$ strebt. Interessanter Weise folgt aus diesem Resultat ohne jede weitere Rechnung wegen

$$|l_{1.c}(t)| \to +\infty \quad \text{oder} \quad |l_{2,c}(t)| \to +\infty \quad \text{für} \quad c \uparrow 1,$$

sogar

$$|l_{1.c}(t)| \to +\infty \quad \text{und} \quad |l_{2,c}(t)| \to +\infty \quad \text{für} \quad c \uparrow 1,$$

Ähnliche Untersuchungen für den Grenzübergang $c \downarrow -1$ bleiben den Lesern überlassen.

Mengenlehre: R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv und E Algebra in A.
R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv und ϕ Funktion.
f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv und f Funktion.

Ersterstellung: 11/07/14 **Letzte Änderung: 16/07/14**

304-1. Falls f eine Funktion ist und falls $f(p)$ eine Menge ist, so gilt $(p, f(p)) \in f$.

304-1(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$f(p)$ Menge" folgt "$(p, f(p)) \in f$".*

b) *Aus "$\square$ Algebra in A" und "$p\_\square\_q$ Menge" folgt "$((p,q), p\_\square\_q) \in \square$".*

`ALG`-**Notation**.

Beweis **304-1** `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(p)$ Menge"
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `1` "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`b)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (p\_\square\_q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_\square\_q$ Menge"
folgt: $\square(p,q)$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\square$ Funktion.

`3:` Aus `2` "$\square$ Funktion" und
aus `2` "$\square(p,q)$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $((p,q), \square(p,q)) \in \square$.

`4:` Aus "$\square(p,q) = p\_\square\_q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p,q), \square(p,q)) = ((p,q), p\_\square\_q)$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`
folgt: $((p,q), p\_\square\_q) \in \square$.

$\square$

304-2. In einigen interessanten Fällen ist bei $c_E_., \phi-$rekursiven Klassen die Klasse E eine Algebra in A.

<u>**304-2(Satz)**</u> *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` R *ist* $c\_\Box\_., \phi$*-rekursiv.*

`ii)` $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (c\_\Box\_\alpha, \gamma) \in R) \Rightarrow ((\beta, \gamma) \in \phi)$.

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **304-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich R ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta), (c\_\Box\_\alpha, \gamma) \in R$.

`2:` Aus `Thema1` "$\ldots (c\_\Box\_\alpha, \gamma) \in R$"
folgt via **9-15**: $c\_\Box\_\alpha$ Menge.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra in A" und
aus `2` "$c\_\Box\_\alpha$ Menge"
folgt via **304-1**: $((c, \alpha), c\_\Box\_\alpha) \in \Box$.

`4:` Aus `VS` gleich "R ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv",
aus `Thema1` "$(\alpha, \beta), (c\_\Box, \alpha, \gamma) \in R$" und
aus `3` "$((c, \alpha), c\_\Box\_\alpha) \in \Box$"
folgt via **302-1(Def)**: $(\beta, \gamma) \in \phi$.

Beweis **304-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(c\_\square\_\alpha,\gamma) \in R) \Rightarrow ((\beta,\gamma) \in \phi)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\delta,\epsilon),(\eta,\xi) \in R) \wedge (((c,\delta),\eta) \in \square)$.

2: Aus →) "$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\square$ Funktion.

3: Aus 2 "$\square$ Funktion" und
aus `Thema1` "$\ldots((c,\delta),\eta) \in \square$"
folgt via **18-20**: $\eta = \square(c,\delta)$.

4: Aus 3
folgt: $\eta = c\_\square\_\delta$.

5: Aus 4 "$\eta = c\_\square\_\delta$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\eta,\xi) = (c\_\square\_\delta,\xi)$.

6: Aus `Thema1` "$\ldots(\eta,\xi) \in R\ldots$" und
aus 5
folgt: $(c\_\square\_\delta,\xi) \in R$.

7: Aus `Thema1` "$(\delta,\epsilon)\ldots \in R\ldots$",
aus 6 "$(c\_\square\_\delta,\xi) \in R$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(c\_\square\_\alpha,\gamma) \in R)$
$\Rightarrow ((\beta,\gamma) \in \phi)$"
folgt: $(\epsilon,\xi) \in \phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall\delta,\epsilon,\eta,\xi : (((\delta,\epsilon),(\eta,\xi) \in R) \wedge (((c,\delta),\eta) \in \square)) \Rightarrow ((\epsilon,\xi) \in \phi)$.

Konsequenz via **302-1(Def)**: R ist $c\_\square\_.,\phi$-rekursiv.

$\square$

304-3. Mitunter ist ϕ eine Funktion und es wird eine $c_E_., \phi-$rekursive Klasse betrachtet.

304-3(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow)$ *ϕ Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.*

`ii)` $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow (\delta = \phi(\beta))$.

Beweis **304-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii}}$ `VS` gleich R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

`Thema1` $((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)$.

`2:` Aus `VS` gleich "R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv" und
aus `Thema1`$((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)$
folgt via **302-1(Def)**: $(\beta, \delta) \in \phi$.

`3:` Aus $\rightarrow)$"ϕ Funktion" und
aus 2"$(\beta, \delta) \in \phi$"
folgt via **18-20**: $\delta = \phi(\beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow (\delta = \phi(\beta))$.

Beweis **304-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow (\delta = \phi(\beta))$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\rho, \epsilon), (\eta, \xi) \in R) \wedge (((c, \rho), \eta) \in E)$.

2: Aus `Thema1` "$((\rho, \epsilon), (\eta, \xi) \in R) \wedge (((c, \rho), \eta) \in E)$" und
aus `VS` gleich
"$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow (\delta = \phi(\beta))$"
folgt: $\xi = \phi(\epsilon)$.

3: Aus `Thema1` "$\ldots (\eta, \xi) \in R \ldots$"
folgt via **9-15**: ξ Menge.

4: Aus 3 und
aus 2
folgt: $\phi(\epsilon)$ Menge.

5: Aus →) "ϕ Funktion" und
aus 4 "$\phi(\epsilon)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(\epsilon, \phi(\epsilon)) \in \phi$.

6: Aus 2 "$\xi = \phi(\epsilon)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\epsilon, \xi) = (\epsilon, \phi(\epsilon))$.

7: Aus 5 und
aus 6
folgt: $(\epsilon, \xi) \in \phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall \rho, \epsilon, \eta, \xi : (((\rho, \epsilon), (\eta, \xi) \in R) \wedge (((c, \rho), \eta) \in E)) \Rightarrow ((\epsilon, \xi) \in \phi)$.

Konsequenz via **302-1(Def)**: R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

□

304-4. In nicht wenigen Fällen ist $\Box$ eine Algebra in A *und* ϕ ist eine Funktion, wenn $c_\Box_.,\phi-$rekursive Klassen betrachtet werden.

304-4(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) *$\Box$ Algebra in A.*

$\rightarrow$) *ϕ Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *R ist $c\_\Box\_.,\phi$-rekursiv.*

`ii)` $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(c\_\Box\_\alpha,\gamma)\in R) \Rightarrow (\gamma=\phi(\beta))$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **304-4** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich R ist $c\_\Box\_.,\phi$-rekursiv.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra in A" und
aus `VS` gleich "R ist $c\_\Box\_.,\phi$-rekursiv"
folgt via **304-2**: $\forall\delta,\epsilon,\eta : ((\delta,\epsilon),(c\_\Box\_\delta,\eta)\in R) \Rightarrow ((\epsilon,\eta)\in\phi)$.

`Thema1` $(\alpha,\beta),(c\_\Box\_\alpha,\gamma)\in R$.

`2:` Aus `Thema1` "$(\alpha,\beta),(c\_\Box\_\alpha,\gamma)\in R$" und
aus `1` "$\forall\delta,\epsilon,\eta : ((\delta,\epsilon),(c\_\Box\_\delta,\eta)\in R) \Rightarrow ((\epsilon,\eta)\in\phi)$" "
folgt: $(\beta,\gamma)\in\phi$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "ϕ Funktion" und
aus `2` "$(\beta,\gamma)\in\phi$"
folgt via **18-20**: $\gamma=\phi(\beta)$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta),(c\_\Box\_\alpha,\gamma)\in R) \Rightarrow (\gamma=\phi(\beta))$.

<u>Beweis **304-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (c\_\square\_\alpha, \gamma) \in R) \Rightarrow (\gamma = \phi(\beta)).$

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\delta, \epsilon), (\eta, \xi) \in R) \wedge (((c, \delta), \eta) \in \square).$

`2.1:` Aus `Thema1`“$\ldots (\eta, \xi) \in R \ldots$”
folgt via **9-15**: ξ Menge.

`2.2:` Aus →)“$\square$ Algebra in A”
folgt via **93-6**: $\square$ Funktion.

`3:` Aus `2.2`“$\square$ Funktion” und
aus `VS` gleich “$\ldots ((c, \delta), \eta) \in \square$”
folgt via **18-20**: $\eta = \square(c, \delta).$

`4:` Aus `3`
folgt: $\eta = c\_\square\_\delta.$

`5:` Aus `4`“$\eta = c\_\square\_\delta$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\eta, \xi) = (c\_\square\_\delta, \xi).$

`6:` Aus `5` und
aus `Thema1`“$\ldots (\eta, \xi) \in R \ldots$”
folgt: $(c\_\square\_\delta, \xi) \in R.$

`7:` Aus `Thema1`“$(\delta, \epsilon) \ldots \in R$”,
aus `6`“$(c\_\square\_\delta, \xi) \in R$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (c\_\square\_\alpha, \gamma) \in R)$
$\Rightarrow (\gamma = \phi(\beta))$”
folgt: $\xi = \phi(\epsilon).$

`8:` Aus `2.1` und
aus `7`
folgt: $\phi(\epsilon)$ Menge.

...

...

<u>Beweis **304-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\forall\alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (c\_\Box\_\alpha, \gamma) \in R) \Rightarrow (\gamma = \phi(\beta)).$

...

`Thema1` $((\delta, \epsilon), (\eta, \xi) \in R) \wedge (((c, \delta), \eta) \in \Box).$

...

`9:` Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `8` "$\phi(\epsilon)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(\epsilon, \phi(\epsilon)) \in \phi.$

`10:` Aus `7` "$\xi = \phi(\epsilon)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\epsilon, \xi) = (\epsilon, \phi(\epsilon)).$

`11:` Aus `9` und
aus `10`
folgt: $(\epsilon, \xi) \in \phi.$

Ergo `Thema1`: $\forall\delta, \epsilon, \eta, \xi : ((\delta, \epsilon), (\eta, \xi) \in R) \wedge (((c, \delta), \eta) \in \Box) \Rightarrow ((\epsilon, \xi) \in \phi).$

Konsequenz via **302-1(Def)**: R ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv.

□

304-5. Ist R eine $c_E_., \phi-$rekursive Klasse, so ist R nicht notwendiger Weise eine Funktion - R muss nicht einmal eine Relation sein. Gelegentlich ist es von Interesse, $c_E_, \phi-$rekursive *Funktionen* zu untersuchen.

304-5(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv.*

`ii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \alpha), \beta) \in E)) \Rightarrow ((f(\alpha), f(\beta)) \in \phi)$.

Beweis **304-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \alpha), \beta) \in E)$.

`2.1`: Aus $\rightarrow$)"f Funktion" und
aus `Thema1`"$\alpha \ldots \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)) \in f$.

`2.2`: Aus $\rightarrow$)"f Funktion" und
aus `Thema1`"$\ldots \beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\beta, f(\beta)) \in f$.

`3`: Aus `VS` gleich "f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv",
aus `2.1`"$(\alpha, f(\alpha)) \in f$",
aus `2.2`"$(\beta, f(\beta)) \in f$" und
aus `Thema1`"$\ldots ((c, \alpha), \beta) \in E)$"
folgt via **302-1(Def)**: $(f(\alpha), f(\beta)) \in \phi$.

Beweis **304-5** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(((c,\alpha),\beta)\in E))\Rightarrow((f(\alpha),f(\beta))\in\phi)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\delta,\epsilon),(\eta,\xi)\in f)\wedge(((c,\delta),\eta)\in E)$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$(\delta,\epsilon)\ldots\in f\ldots$"
folgt via **7-5**: $\delta\in\mathsf{dom}\,f$.

`2.2:` Aus `Thema1` "$\ldots(\eta,\xi)\in f\ldots$"
folgt via **7-5**: $\eta\in\mathsf{dom}\,f$.

`2.3:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1` "$(\delta,\epsilon)\ldots\in f\ldots$"
folgt via **18-20**: $\epsilon=f(\delta)$.

`2.4:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1` "$\ldots(\eta,\xi)\in f\ldots$"
folgt via **18-20**: $\xi=f(\eta)$.

`3:` Aus `2.1` "$\delta\in\mathsf{dom}\,f$",
aus `2.2` "$\eta\in\mathsf{dom}\,f$",
aus `Thema1` "$\ldots((c,\delta),\eta)\in E$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta\in\mathsf{dom}\,f)$
$\wedge(((c,\alpha),\beta)\in E))\Rightarrow((f(\alpha),f(\beta))\in\phi)$"
folgt: $(f(\delta),f(\eta))\in\phi$.

`4:` Aus `2.3` "$\epsilon=f(\delta)$" und
aus `2.4` "$\xi=f(\eta)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\epsilon,\xi)=(f(\delta),f(\eta))$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\epsilon,\xi)\in\phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall\delta,\epsilon,\eta,\xi : (((\delta,\epsilon),(\eta,\xi)\in f)\wedge(((c,\delta),\eta)\in E))\Rightarrow((\epsilon,\xi)\in\phi)$.

Konsequenz via **302-1(Def)**: f ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

□

304-6. Gelegentlich ist f eine $c\_\Box\_., \phi-$ rekursive *Funktion* und $\Box$ ist eine Algebra in A.

<u>**304-6(Satz)**</u> *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra in* A.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *ist* $c\_\Box\_., \phi$*-rekursiv.*

`ii)` $\forall\alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow ((f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi)$.

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **304-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `Thema1`“ ... $c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt via **ElementAxiom**: $c\_\Box\_\alpha$ Menge.

`3:` Aus $\rightarrow\!)$“ $\Box$ Algebra in A ” und
aus 2“ $c\_\Box\_\alpha$ Menge ”
folgt via **304-1**: $((c, \alpha), c\_\Box\_\alpha) \in \Box$.

`4:` Aus $\rightarrow\!)$“ f Funktion ”,
aus `VS` gleich “ f ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv ”,
aus `Thema1`“ $\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus 3“ $((c, \alpha), c\_\Box\_\alpha) \in \Box$ ”
folgt via **304-5**: $(f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in f) \Rightarrow ((f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi)$.

Beweis **304-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in f) \Rightarrow ((f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi).$

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta, \gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \beta), \gamma) \in \Box).$

`2:` Aus →) " $\Box$ Algebra in A "
folgt via **96-3**: $\Box$ Funktion.

`3:` Aus `2` " $\Box$ Funktion " und
aus `Thema1` " $\ldots ((c, \beta), \gamma) \in \Box$ "
folgt via **18-20**: $\gamma = \Box(c, \beta).$

`4:` Aus `3`
folgt: $\gamma = c\_\Box\_\beta.$

`5:` Aus `4` und
aus `Thema1.1` " $\ldots \gamma \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ "
folgt: $c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f.$

`6:` Aus `Thema1.1` " $\beta \ldots \in \mathsf{dom}\, f$ ",
aus `5` " $c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f$ " und
aus `VS` gleich " $\forall\alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in f)$
$\Rightarrow ((f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi)$ "
folgt: $(f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) \in \phi.$

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	" $\forall\beta, \gamma : (((\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \beta), \gamma) \in \Box)) \Rightarrow ((f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) \in \phi)$ "

`1.2:` Aus →) " f Funktion " und
aus `A1` gleich " $\forall\beta, \gamma : (((\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \beta), \gamma) \in \Box))$
$\Rightarrow ((f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) \in \phi)$ "
folgt via **304-5**: f ist $c\_\Box\_\cdot, \phi$-rekursiv.

$\Box$

304-7. Es kann auch vorkommen, dass f eine $c\_E\_.,\phi$−rekursive *Funktion* und ϕ eine Funktion ist.

304-7(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

→) f *Funktion.*

→) ϕ *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *ist* $c\_E\_.,\phi$*-rekursiv.*

`ii)` $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),\beta) \in E)) \Rightarrow (f(\beta) = \phi(f(\alpha)))$.

Beweis **304-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

`Thema1` $(\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),\beta) \in E)$.

2: Aus →) "f Funktion",
aus `VS` gleich "f ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv" und
aus `Thema1` "$(\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),\beta) \in E)$"
folgt via **304-5**: $(f(\alpha),f(\beta)) \in \phi$.

3: Aus →) "ϕ Funktion" und
aus 2 "$(f(\alpha),f(\beta)) \in \phi$"
folgt via **18-20**: $f(\beta) = \phi(f(\alpha))$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),\beta) \in E)) \Rightarrow (f(\beta) = \phi(f(\alpha)))$.

Beweis **304-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\qquad \forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),\beta) \in E)) \Rightarrow (f(\beta) = \phi(f(\alpha)))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\qquad (\gamma,\delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\gamma),\delta) \in E)$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$(\gamma,\delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\gamma),\delta) \in E)$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),\beta) \in E))$
$\Rightarrow (f(\beta) = \phi(f(\alpha)))$"
folgt: $\qquad f(\delta) = \phi(f(\gamma))$.

`3:` Aus `Thema1.1` "$\ldots \delta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **17-5**: $\qquad f(\delta)$ Menge.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\qquad \phi(f(\gamma))$ Menge.

`5:` Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `4` "$\phi(f(\gamma))$ Menge"
folgt via **304-1**: $\qquad (f(\gamma),\phi(f(\gamma))) \in \phi$.

`6:` Aus `2` "$f(\delta) = \phi(f(\gamma))$"
folgt via **PaarAxiom I**: $\qquad (f(\gamma), f(\delta)) = (f(\gamma),\phi(f(\gamma)))$.

`7:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $\qquad (f(\gamma), f(\delta)) \in \phi$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	"$\forall\gamma,\delta : ((\gamma,\delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\gamma),\delta) \in E)) \Rightarrow ((f(\delta), f(\gamma)) \in \phi)$"

`1.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall\gamma,\delta : ((\gamma,\delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\gamma),\delta) \in E))$
$\Rightarrow ((f(\delta), f(\gamma)) \in \phi)$"
folgt via **304-5**: $\qquad f$ ist $c\_E\_,\phi$-rekursiv.

□

304-8. Ist f eine $c_\Box_., \phi-$rekursive *Funktion*, wobei $\Box$ eine Algebra in A und ϕ eine Funktion ist, so nimmt **304-1(Def)** eine recht vertraute Form an.

304-8(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A*.*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *ist* $c\_\Box\_., \phi$*-rekursiv.*

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(c\_\Box\_\alpha) = \phi(f(\alpha)))$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **304-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f$.

`2`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra in A",
aus `VS` gleich "f ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv" und
aus `Thema1` "$\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **304-6**: $(f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi$.

`3`: Aus $\rightarrow$) "ϕ Funktion" und
aus 2 "$(f(\alpha), f(c\_\Box\_\alpha)) \in \phi$"
folgt via **18-20**: $f(c\_\Box\_\alpha) = \phi(f(\alpha))$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(c\_\Box\_\alpha) = \phi(f(\alpha)))$.

<u>Beweis **304-8**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(c\_\Box\_\alpha) = \phi(f(\alpha)))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta, c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`2`: Aus `Thema1.1` "$\beta, c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha, c\_\Box\_\alpha \in \mathsf{dom}\, f)$
$\Rightarrow (f(c\_\Box\_\alpha) = \phi(f(\alpha)))$"
folgt: $f(c\_\Box\_\beta) = \phi(f(\beta))$.

`3`: Aus `Thema1.1` "$\ldots c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-5**: $f(c\_\Box\_\beta)$ Menge.

`4`: Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\phi(f(\beta))$ Menge.

`5`: Aus →) "ϕ Funktion" und
aus `4` "$\phi(f(\beta))$ Menge"
folgt via **304-1**: $(f(\beta), \phi(f(\beta))) \in \phi$.

`6`: Aus `2` "$f(c\_\Box\_\beta) = \phi(f(\beta))$"
folgt via **PaarAxiom I**:
$(f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) = (f(\beta), \phi(f(\beta)))$.

`7`: Aus `5` und
aus `6`
folgt: $(f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) \in \phi$.

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall\beta : (\beta, c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow ((f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) \in \phi)$"

`1.2`: Aus →) "f Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta, c\_\Box\_\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow ((f(\beta), f(c\_\Box\_\beta)) \in \phi)$"
folgt via **304-6**: f ist $c\_\Box\_.$, ϕ-rekursiv.

$\Box$

304-9. $c\_E\_.,\phi$–rekursive *Funktionen* sind von besonderem Interesse. Ihnen sind die weiteren Untersuchungen dieses Essays gewidmet.

304-9(Definition)

1) $\mathtt{304.0}(x,y,z,u)$
$$= \{\omega : (\omega \text{ ist } x\_y\_., z\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}.$$

2) $\mathtt{304.1}(x,y,z,u,v)$
$$= \{\omega : (\omega \text{ ist } x\_y\_., z\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (u \subseteq \omega \subseteq v)\}.$$

304-10(AC). Ist u eine Menge, so gibt es eine "$\subseteq$maximale Funktion", die eine Teilmenge von u und $c_E_., \phi-$rekursiv ist.

304-10(AC)(Satz)

Aus "u Menge"

$$\textit{folgt } \text{“}\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } c\_E\_., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \textit{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq u) \wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } c\_E\_., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\alpha \textit{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))\text{”}.$$

Beweis **304-10(AC)** VS gleich u Menge.

$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ **304-9(Def)**

Thema1.1

$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

Aus Thema1.1

folgt: $\alpha \subseteq u$.

Ergo Thema1.1:

$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$.

Konsequenz via **0-29**:

A1 | "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"

1.2: Aus VS gleich "u Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(u)$ Menge.

2: Aus A1 gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge(\omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$" und
aus 1.2"$\mathcal{P}(u)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**:

A2 | "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ Menge"

3: Via **68-1(Def)**:
$\exists\Psi : \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

...

Beweis **304-10(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema4.1` α ist Ψ_Kette.

`5.1:` Aus `3`"... Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge(\omega \subseteq u)\}$" und
aus `Thema4.1`"α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge(\omega \subseteq u)\}.$$

`5.2:` Aus `3`"... Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge(\omega \subseteq u)\}$" und
aus `Thema4.1`"α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta)).$$

`6.1:` Aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`6.2:` Aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$.

`7.1:` Aus `6.1`"α Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \alpha$ Menge.

`7.2:` Aus `6.2`"$\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup \alpha \subseteq u$.

...

...

Beweis **304-10(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema4.1` α ist Ψ_Kette.

...

`Thema8.1` $\delta \in \alpha$.

`9:` Aus `Thema8.1`"$\delta \in \alpha$" und
aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}.$$

`10:` Aus `9`
folgt: δ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

Ergo `Thema8.1`: `A3` | "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv$)$"

`8.2:` Aus `A3` gleich "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv$)$" und
aus `5.2`"$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **302-2**: $\bigcup \alpha$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

...

...

Beweis **304-10(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema4.1` α ist Ψ_Kette.

...

`Thema8.3` $\delta \in \alpha$.

`9:` Aus `Thema8.3`"$\delta \in \alpha$" und
aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:

$$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}.$$

`10:` Aus `9`
folgt: δ Funktion.

Ergo `Thema8.1`: `A4` | "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ Funktion})$"

`8.4:` Aus `A4` | "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ Funktion})$" und
aus `5.2`"$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup \alpha$ Funktion.

`9:` Aus `8.2`"$\bigcup \alpha$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv",
aus `8.4`"$\bigcup \alpha$ Funktion",
aus `7.2`"$\bigcup \alpha \subseteq u$" und
aus `7.1`"$\bigcup \alpha$ Menge"
folgt:

$$\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}.$$

Ergo `Thema4.1`:

`A5` | "$\forall \alpha : (\alpha \text{ ist } \Psi\_\text{Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\})$"

...

Beweis **304-10(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`4.2:` Aus `3`“ $\ldots\Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$” ,
aus `2`“ $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ Menge“ und
aus `A5` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \text{ ist } \Psi\text{\_Kette}) \Rightarrow (\bigcup\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\})$”
folgt via **Lemma von Zorn I, TeilMengenVersion**:
$\exists\Omega : \Omega$ ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`5:` Aus `4.2`“ $\ldots\Omega$ ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$”
folgt via **39-1(Def)**:
$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`6:` Aus `5`“ $\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$ ”
folgt:
$(\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq u)$.

...

Beweis **304-10(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

`Thema7.1`
$(\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

`8`: Aus `Thema7.1`"$\ldots \alpha \subseteq u$" und
aus `VS` gleich "u Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`9`: Aus `Thema7.1`"$(\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\ldots \alpha \subseteq u)$" und
aus `8`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$.

`10`: Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$",
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$",
aus `5`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `9`"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **68-4**: Ω_Ψ_α.

`11`: Aus `4.2`"$\ldots \Omega$ ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$",
aus `9`"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `10`"Ω_Ψ_α"
folgt via **39-1(Def)**: α_Ψ_Ω.

`12`: Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `11`"α_Ψ_Ω"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

`13`: Aus `12`"$\alpha \subseteq \Omega$" und
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \Omega$.

...

Beweis **304-10(AC)** `VS` gleich u Menge.

...

Ergo `Thema7.1`:

`A6`	"$\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"

`7.2:` Aus `4.2`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `6`"$(\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq u)$" und
aus `A6` gleich "$\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt:

$$\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq u) \wedge (\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

□

304-11(AC). Falls v überhaupt eine $c\_E\_.,\phi$-rekursive Funktion f mit $(v \subseteq)f \subseteq u$, u Menge, als Fortsetzung hat, so gibt es in

$$\{\omega : (\omega \text{ ist } x\_y\_., z\text{-rekursiv}\}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$$

ein "$\subseteq$maximales Element", also eine "$\subseteq$maximale" $c\_E\_.,\phi$-Fortsetzung von v, die eine Funktion und eine TeilKlasse von u ist.

304-11(AC)(Satz)

Aus "$v \subseteq f \subseteq u$ Menge" und "f ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv" und "f Funktion" folgt "$\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } c\_E\_.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \textit{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } c\_E\_.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\alpha \textit{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u))$
$\Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **304-11(AC)**
`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (f \text{ Funktion}).$

$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ **304-9(Def)**

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots f \subseteq u \ldots$" und
aus `VS` gleich "u Menge..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: f Menge.

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (f \text{ Funktion})$",
aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq f \subseteq u \ldots$" und
aus `1.1` "f Menge"
folgt: $f \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$

`3`: Aus `2` "$f \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-20**:

`A1` | "$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"

`Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$

Aus `Thema1.2` folgt: $\alpha \subseteq u.$

Ergo `Thema1.2`:
$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u).$$

Konsequenz via **0-29**:

`A2` | "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"

...

Beweis **304-11(AC)**

`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

`1.3:` Aus `VS` gleich "... u Menge... "
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(u)$ Menge.

`2:` Aus `A2` gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$" und
aus `1.3` "$\mathcal{P}(u)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**:

`A3`	"$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge"

`3:` Via **68-1(Def)**: $\exists \Psi : \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

...

Beweis **304-11(AC)**
`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}).$

...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

`5.1:` Aus `Thema4.1`“$0 \neq \alpha \ldots$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \alpha.$

`5.2:` Aus `3`“$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus `Thema4.1`“$\ldots \alpha$ ist Ψ_Kette”
folgt via **302-6**:
$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$

`5.3:` Aus `3`“$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus `Thema4.1`“$\ldots \alpha$ ist Ψ_Kette”
folgt via **302-6**:
$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta)).$

`6.1:` Aus `5.1`“$\ldots \Omega \in \alpha$”
folgt via **1-15**: $\Omega \subseteq \bigcup \alpha.$

`6.2:` `5.1`“$\ldots \Omega \in \alpha$” und
aus `5.2`“$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”
folgt via **0-4**:
$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$

`6.3:` Aus `5.2`“$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus `A3` gleich “$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

...

...

Beweis **304-11(AC)**
VS gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

6.4: Aus 5.2 "$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus A2 gleich "$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **0-6**: $\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$.

7.1: Aus 6.2 "$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt: $v \subseteq \Omega$.

7.2: Aus 6.3 "α Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \alpha$ Menge.

7.3: Aus 6.4 "$\alpha \subseteq \mathcal{P}(u)$"
folgt via **1-19**: $\bigcup \alpha \subseteq u$.

$\boxed{\texttt{Thema8.1}}$ $\delta \in \alpha$.

9: Aus Thema8.1 "$\delta \in \alpha$" und
aus 5.1 "$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

10: Aus 9
folgt: δ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

Ergo Thema8.1:

A4	"$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$"

...

...

Beweis **304-11(AC)**
`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

`Thema4.1` $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`8.2`: Aus `A4` gleich "$\forall\delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$" und
aus `5.3`"$\forall\beta,\gamma : (\beta,\gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **302-2**: $\bigcup\alpha$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

`8.3`: Aus `7.1`"$v \subseteq \Omega$" und
aus `6.1`"$\Omega \subseteq \bigcup\alpha$"
folgt via **0-6**: $v \subseteq \bigcup\alpha$.

`Thema8.4` $\delta \in \alpha$.

`9`: Aus `Thema8.4`"$\delta \in \alpha$" und
aus `5.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`10`: Aus `9`
folgt: δ Funktion.

Ergo `Thema8.4`: `A5` | "$\forall\delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ Funktion})$"

`8.5`: Aus `A5` gleich "$\forall\delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ Funktion})$" und
aus `5.3`"$\forall\beta,\gamma : (\beta,\gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup\alpha$ Funktion.

...

...

Beweis **304-11(AC)**
`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`9:` Aus `8.2`“$\bigcup \alpha$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv”,
aus `8.5`“$\bigcup \alpha$ Funktion”,
aus `8.3`“$v \subseteq \bigcup \alpha$”,
aus `7.3`“$\bigcup \alpha \subseteq u$” und
aus `7.2`“$\bigcup \alpha$ Menge”
folgt: $\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

Ergo `Thema4.1`:

`A6` | “$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \text{ ist } \Psi\_\text{Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$”

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”,
aus `A1` gleich “$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”,
aus `A3` gleich “$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge” und
aus `A6` gleich “$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \text{ ist } \Psi\_\text{Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$”
folgt via **Lemma von Zorn I*, TeilMengenVersion**:
$\exists \Omega : \Omega$ ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

...

Beweis **304-11(AC)**
`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}).$

...

`5:` Aus `4.2`"$\ldots \Omega$ ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **39-1(Def)**:
$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$

`6:` Aus `5`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt: $(\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u).$

`Thema7.1`
$(\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

`8.1:` Aus `6`"$\ldots v \subseteq \Omega \ldots$" und
aus `Thema1.7`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$"
folgt via **0-6**: $v \subseteq \alpha.$

`8.2:` Aus `Thema7.1`"$\ldots \alpha \subseteq u$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u$ Menge..."
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`9:` Aus `Thema7.1`"$(\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv} \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \ldots$",
aus `8.1`"$v \subseteq \alpha$",
aus `Thema7.1`"$\ldots \alpha \subseteq u$" und
aus `8.2`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$

`10:` Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\omega \subseteq u)\}$",
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$",
aus `5`"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus `9`"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge (\omega \subseteq u)\}$
folgt via **68-4**: $\Omega\_\Psi\_\alpha.$

...

...

Beweis **304-11(AC)**
`VS` gleich $(v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$.

...

`Thema7.1`
$(\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

...

`11:` Aus `4.2`"$\ldots \Omega$ ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$",
aus `9`"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `10`"Ω_Ψ_α"
folgt via **39-1(Def)**: α_Ψ_Ω.

`12:` Aus `3`"$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `11`"α_Ψ_Ω"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

`13:` Aus `12`"$\alpha \subseteq \Omega$" und
aus `Thema7.1`"$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \Omega$.

Ergo `Thema7.1`:

`A7` | "$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"

`7.2:` Aus `4.2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `6`"$(\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$" und
aus `A6`"$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

□

304-12(AC). Durch Spezialisierung auf $u = f$ ergibt sich aus **304-11(AC)** ein "$\subseteq$maximaler Erweiterungssatz für $c\_E\_., \phi$-rekursive Funktionen.

304-12(AC)(Satz)

Aus "$f \subseteq u$ Menge" und "f Funktion" und "f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv" folgt "$\exists \Omega : (\Omega \textit{ ist } c\_E\_., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \textit{ Funktion}) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \textit{ ist } c\_E\_., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\alpha \textit{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u))$
$\Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **304-12(AC)**

`VS` gleich $(f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$.

1: Via **0-6** gilt: $f \subseteq f$.

2: Aus 1"$f \subseteq f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (f \subseteq u) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv})$"
folgt via **304-11(AC)**:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u))$$
$$\Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

□

304-13(AC). Mit ein wenig Geschick ergibt sich aus **304-11(AC)** in weiterer Folge ein "$\subseteq$maximaler" Erweiterungssatz für $c\_E\_, \phi$-rekursive Funktionen mit Startwert (p, q). Zunächst wird Vorliegendes notiert.

304-13(AC)(Satz)

Aus "$(p, q) \in v \subseteq f \subseteq u$ Menge" und "f Funktion" und "f ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv" folgt "$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv mit Starwert } (p, q)) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **304-13(AC)**

`VS` gleich $((p, q) \in v \subseteq f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots v \subseteq f \subseteq u$ Menge) $\wedge$ (f Funktion)" und
aus `VS` gleich "$\ldots f$ ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv"
folgt via **304-11(AC)**:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in v \ldots$" und
aus `1` "$\ldots v \subseteq \Omega \ldots$"
folgt via **0-4**: $(p, q) \in \Omega$.

`3`: Aus `1` "$\ldots \Omega$ ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv$\ldots$" und
aus `2` "$(p, q) \in \Omega$"
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q).

`4`: Aus `1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1` "$\ldots \Omega$ Funktion$\ldots$",
aus `3` "Ω ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)",
aus `1` "$\ldots v \subseteq \Omega \subseteq u \ldots$" und
aus `1` "$\ldots \forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv mit Startwert } (p, q)) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u) \wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_, \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

$\square$

304-14(AC). Es gibt eine "$\subseteq$maximale" Erweiterung einer $c\_E\_., \phi$-rekursiven Funktion f mit Startwert (p, q).

304-14(AC)(Satz)

Aus "$f \subseteq u$ Menge" und "f Funktion"
und "f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv mit Starwert } (p, q)) \wedge (\Omega \text{ Funktion})$
$\wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u))$
$\Rightarrow (\alpha = \Omega))$".

Beweis **304-14(AC)** `VS` gleich $(f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion})$
$\wedge (f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv mit Startwert} (p, q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)"
folgt via **302-1(Def)**: $(f \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((p, q) \in f)$.

`1.2:` Via **0-6** gilt: $f \subseteq f$.

`2:` Aus `1.1`"$\ldots (p, q) \in f$",
aus `1.2`"$f \subseteq f$",
aus `VS` gleich "$(f \subseteq u \text{ Menge}) \wedge (f \text{ Funktion}) \ldots$" und
aus `1.1`"f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv$\ldots$"
folgt via **304-13(AC)**:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv mit Startwert } (p, q)) \wedge (\Omega \text{ Funktion})$$
$$\wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } c\_E\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u))$$
$$\Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

$\square$

304-15. Ist f eine $c_E_., \phi-$rekursive *Funktion* mit Startwert (p, q), so gilt $f(p) = q$.

> <u>**304-15(Satz)**</u> *Es gelte:*
>
> →) f *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv mit Startwert* (p, q).
>
> →) f *Funktion.*
>
> *Dann folgt* "$f(p) = q$".

<u>Beweis **304-15**</u>

1: Aus →) "f ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)"
folgt via **302-1**: $(p, q) \in f$.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus 1 "$(p, q) \in f$"
folgt via **18-20**: $q = f(p)$.

3: Aus 2
folgt: $f(p) = q$.

□

Analysis: $1+.,\phi$-rekursive Klassen mit Definitions-Bereich$\in\mathbb{N}$ oder $=\mathbb{N}$ (und Startwert (p,q)).
$1+.,\phi$-rekursive Funktionen mit Definitions-Bereich$\in\mathbb{N}$ oder $=\mathbb{N}$ (und Startwert (p,q)).
Archimedes III.

Ersterstellung: 16/07/14 **Letzte Änderung: 23/07/14**

305-1. Ein wichtiger Spezialfall $c_E_.,\phi-$rekursiver *Funktionen* mit Startwert (p,q) liegt vor, wenn $c=1$, $E=\mathsf{A}$, ϕ eine Funktion ist und $p=0$ gilt. In diesen Lagen sind Existenz- und Eindeutigkeits-Aussagen verfügbar. Als Vorbereitung wird eine auch an sich bemerkenswerte Klasse in die Essays eingebracht.

305-1(Definition)

$$\mathsf{305.0}(x,y)=\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,x)\wedge(x(\omega)\neq y(\omega))\}.$$

305-2. Hier werden Eigenschaften von $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$ nachgewiesen.

305-2(Satz)

a) *“$p \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$” genau dann, wenn “$(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) \neq y(p))$”.*

b) *“$p \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$”. genau dann, wenn “$(p \notin \mathsf{dom}\, x) \vee (x(p) = y(p))$”.*

c) $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\} \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

d) *“$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\} = 0$” genau dann, wenn “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha))$”.*

e) *Aus “f, g Funktion” und “$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0$” folgt “$f \subseteq g$”.*

$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$ **305-1(Def)**

Beweis **305-2** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$.

Aus VS
folgt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) \neq y(p))$.

$\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) \neq y(p))$.

1: Aus VS gleich “$p \in \mathsf{dom}\, x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2: Aus VS gleich “$(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(p) \neq y(p))$” und
aus 1 “p Menge”
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$.

b)
Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(p \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq x(\omega))\})$
$\Leftrightarrow ((p \notin \mathsf{dom}\, x) \vee (x(p) = y(p)))$.

<u>Beweis **305-2**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}.$
Aus `Thema1`	
folgt:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\} \subseteq \mathsf{dom}\, x.$

`d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\} = 0.$

`1:` Es gilt: $(\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha)))$
$\vee(\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\Omega) \neq y(\Omega))).$

$\boxed{\textbf{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\Omega) \neq y(\Omega)).$

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots (\Omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\Omega) \neq y(\Omega))$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}.$

`3:` Aus 2“$\Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}.$

`4:` Es gilt 3“$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$” .
Es gilt `VS` gleich “$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\} = 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha)).$

$\boxed{\textbf{Ende wfFallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha)).$

Beweis **305-2** `d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha)).$

`Thema1` $\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}.$

`2:` Aus `Thema1`"$\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\beta \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\beta) \neq y(\beta)).$$

`3:` Aus `2`"$\beta \in \mathsf{dom}\, x \ldots$" und
aus `VS`
folgt: $x(\beta) = y(\beta).$

`4:` Es gilt `3`"$x(\beta) = y(\beta)$".
Es gilt `2`"$\ldots x(\beta) \neq y(\beta)$".
Ex falso quodlibet folgt:
$$\beta \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}.$$

Ergo `Thema1`:
$$\forall\beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}) \Rightarrow (\beta \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\}).$$

Konsequenz via **0-19**: $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x(\omega) \neq y(\omega))\} = 0.$

`e)`
`VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha)).$$

`2:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion..." und
aus `1`"$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
folgt via **18-43**: $f \subseteq g.$

□

305-3. Die natürlichen Zahlen sind so überschaubar strukturiert, dass über $n \setminus A$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq n$ Vorliegendes zur Verfügung steht.

305-3(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $0 \neq A \subseteq n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $0 \notin A$.

Dann gilt "$\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in n) \wedge (\Omega \notin A) \wedge (1 + \Omega \in A)$".

Beweis **305-3**

≤-Notation.

1: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $n \subseteq \mathbb{N}$.

2: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots A \subseteq n \ldots$" und
aus 1 "$n \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-6**: $A \subseteq \mathbb{N}$.

3: Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq A \ldots$" und
aus 2 "$A \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$: $\exists \Phi : \Phi$ ist $\leq$ _Minimum von A.

4.1: Aus 3 "$\ldots \Phi$ ist $\leq$ _Minimum von A"
folgt via **38-1(Def)**: $\Phi \in A$.

4.2: Aus 3 "$\ldots \Phi$ ist $\leq$ _Minimum von A"
folgt via **38-1(Def)**: Φ untere $\leq$ _Schranke von A.

5.1: Aus 4.1 "$\Phi \in A$" und
aus 2 "$A \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $\Phi \in \mathbb{N}$.

5.2: Aus 4.1 "$\Phi \in A$" und
aus $\rightarrow)$ "$0 \notin A$"
folgt via **0-1**: $\Phi \neq 0$.

5.3: Aus 4.1 "$\Phi \in A$" und
aus $\rightarrow)$ "$\ldots A \subseteq n \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Phi \in n$.

...

<u>Beweis</u> **305-3** ...

`6.1:` Aus `5.2`"$\Phi \neq 0$" und
aus `5.1`"$\Phi \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Phi = 1 + \Omega)$.

`6.2:` Aus →) "$\ldots n \in \mathbb{N}$",
aus `5.1`"$\Phi \in \mathbb{N}$" und
aus `5.3`"$\Phi \in n$"
folgt via **197-5**: $\Phi < n$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $\Omega < 1 + \Omega$.

`7.2:` Aus `4.1` und
aus `6.1`"$\ldots \Phi = 1 + \Omega$"
folgt: $1 + \Omega \in A$.

`8.1:` Aus `6.1`"$\ldots \Phi = 1 + \Omega$" und
aus `7.1`
folgt: $\Omega < \Phi$.

`8.2:` Aus `7.2`"$1 + \Omega \in A$" und
aus →) "$\ldots A \subseteq n \ldots$"
folgt via **0-4**: $1 + \Omega \in n$.

`9.1:` Aus `4.2`"Φ untere $\leq$ -Schranke von A" und
aus `8.1`"$\Omega < \Phi$"
folgt via **297-4**: $\Omega \notin A$.

`9.2:` Aus `8.1`"$\Omega < \Phi$" und
aus `6.2`"$\Phi < n$"
folgt via **107-8**: $\Omega < n$.

`10:` Aus `6.1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$",
aus →) "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `9.2`"$\Omega < n$"
folgt via **197-5**: $\Omega \in n$.

...

Beweis **305-3** ...

`11:` Aus `6.1`"$\exists\Omega\ldots$",
aus `10`"$\Omega \in n$",
aus `8.2`"$1+\Omega \in n$",
aus `9.1`"$\Omega \notin A$" und
aus `7.2`"$1+\Omega \in A$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega, 1+\Omega \in n) \wedge (\Omega \notin A) \wedge (1+\Omega \in A).$

$\square$

305-4. Es ist auch eine "$\mathbb{N}$ an Stelle von $n \in \mathbb{N}$"-Version von **305-3** verfügbar.

> **305-4(Satz)** *Es gelte:*
>
> $\rightarrow\!)$ $0 \neq A \subseteq \mathbb{N}$.
>
> $\rightarrow\!)$ $0 \notin A$.
>
> *Dann gilt* "$\exists\Omega : (\Omega, 1+\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \notin A) \wedge (1+\Omega \in A)$".

Beweis **305-4**

≤-Notation.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$0 \neq A \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **MMS$\mathbb{N}$**: $\exists\Phi : (\Phi \in \mathbb{N}) \wedge (\Phi$ ist $\leq$ _Minimum von $A)$.

`2.1:` Aus `1` "… Φ ist $\leq$ _Minimum von A"
folgt via **38-1(Def)**: $\Phi \in A$.

`2.2:` Aus `1` "… Φ ist $\leq$ _Minimum von A"
folgt via **38-1(Def)**: Φ untere $\leq$ _Schranke von A.

`3:` Aus `2.1` "$\Phi \in A$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$0 \notin A$"
folgt via **0-1**: $\Phi \neq 0$.

`4:` Aus `3` "$\Phi \neq 0$" und
aus `1` "… $\Phi \in \mathbb{N}$ …"
folgt via **300-9**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Phi = 1+\Omega)$.

`5.1:` Aus `4` "… $\Omega \in \mathbb{N}$ …"
folgt via **159-10**: $1+\Omega \in \mathbb{N}$.

`5.2:` Aus `4` "… $\Omega \in \mathbb{N}$ …"
folgt via **239-5**: $\Omega < 1+\Omega$.

`6.1:` Aus `2.1` und
aus `4` "… $\Phi = 1+\Omega$"
folgt: $1+\Omega \in A$.

`6.2:` Aus `4` "… $\Phi = 1+\Omega$" und
aus `5.2`
folgt: $\Omega < \Phi$.

…

<u>Beweis</u> **305-4** . . .

`7:` Aus `2.2`“Φ untere $\le$ -Schranke von A” und
aus `6.2`“$\Omega < \Phi$”
folgt via **297-4**: $$\Omega \notin A.$$

`8:` Aus `4`“$\exists\Omega : \Omega \in \mathbb{N} \ldots$”,
aus `5.1`“$1 + \Omega \in \mathbb{N}$”,
aus `7`“$\Omega \notin A$” und
aus `6.1`“$1 + \Omega \in A$”
folgt: $$\exists\Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in n) \wedge (\Omega \notin A) \wedge (1 + \Omega \in A).$$

$\square$

305-5. Nun wird das erste "Eindeutigkeits-Resultat" über $1+.,\phi-$ rekursive Funktionen mit Definitions-Bereich$\in\mathbb{N}$ für Funktionen ϕ bewiesen.

305-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *f,g ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.*

$\rightarrow)$ *f,g,ϕ Funktion.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\,f\in\mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\,f\subseteq\mathsf{dom}\,g$.

Dann folgt "$f\subseteq g$".

Beweis **305-5**

$\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}$ **305-1(Def)**

1: Es gilt: $(0\neq\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\})$
$\vee(\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}=0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0\neq\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}$.

2.1: Aus $\rightarrow)$ "f,g Funktion" und
aus $\rightarrow)$ "f,g ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"
folgt via **304-15**: $(f(0)=q)\wedge(g(0)=q)$.

2.2: Via **305-2** gilt: $\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}\subseteq\mathsf{dom}\,f$.

2.3: Aus $\rightarrow)$ "f,g ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"
folgt via **302-1(Def)**: f,g ist $1+.,\phi$-rekursiv.

3: Aus 2.1
folgt: $f(0)=g(0)$.

4: Aus 3 "$f(0)=g(0)$"
folgt via **305-2**: $0\notin\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}$.

5: Aus `1.1.Fall` "$0\neq\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}$",
aus 2.2 "$\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}\subseteq\mathsf{dom}\,f$",
aus $\rightarrow)$ "$\mathsf{dom}\,f\in\mathbb{N}$" und
aus 4 "$0\notin\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\}$"
folgt via **305-3**: $\exists\Omega:(\Omega,1+\Omega\in\mathsf{dom}\,f)$
$\wedge(\Omega\notin\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\})$
$\wedge(1+\Omega\in\{\omega:(\omega\in\mathsf{dom}\,f)\wedge(f(\omega)\neq g(\omega))\})$.

...

...

<u>Beweis **305-5**</u>

...

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}.$

...

6.1: Aus 5"$\ldots \Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **0-4**: $\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, g.$

6.2: Aus 5"$\ldots \Omega \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$"
folgt via **305-2**: $(\Omega \notin \mathsf{dom}\, f) \vee (f(\Omega) = g(\Omega)).$

6.3: Aus 5"$\ldots 1 + \Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$"
folgt: $f(1 + \Omega) \neq g(1 + \Omega).$

6.4: Aus →) "$f \ldots$ Funktion",
aus →) "$\ldots \phi$ Funktion",
aus 2.3"$f \ldots$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv",
aus AAII"A Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus 5"$\ldots \Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **304-8**: $f(1 + \Omega) = \phi(f(\Omega)).$

7.1: Aus 5"$\ldots \Omega \ldots \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 6.2
folgt: $f(\Omega) = g(\Omega).$

7.2: Aus →) "$\ldots g, \phi$ Funktion",
aus 2.3"$\ldots g$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv",
aus AAII"A Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus 6.1"$\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **304-8**: $g(1 + \Omega) = \phi(g(\Omega)).$

8: Aus 7.1
folgt: $\phi(f(\Omega)) = \phi(g(\Omega)).$

9: Aus 7.2 und
aus 8
folgt: $\phi(f(\Omega)) = g(1 + \Omega).$

10: Aus 9 und
aus 6.4
folgt: $f(1 + \Omega) = g(1 + \Omega).$

...

...

<u>Beweis **305-5**</u>

...

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}.$

...

`11:` Es gilt `10` "$f(1+\Omega) = g(1+\Omega)$".
Es gilt `6.3` "$f(1+\Omega) \neq g(1+\Omega)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0$"

`1.2:` Aus →) "$f, g \ldots$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0$"
folgt via **305-2**: $f \subseteq g.$

□

305-6. Es ist auch eine "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$-Version" von **305-5** verfügbar. Der Beweis verläuft bis auf ein Detail sehr ähnlich zu **305-5**. Da sind die Augenblicke, in denen ich wünsche, Meta-Mathematisches in den Essays zuzulassen.

305-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.*

$\rightarrow\!)$ *f, g, ϕ Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

Dann folgt "$f \subseteq g$".

Beweis **305-6**

$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$ **305-1(Def)**

1: Es gilt: $(0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\})$
$\vee(\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$.

2.1: Aus $\rightarrow\!)$ "f, g Funktion" und
aus $\rightarrow\!)$ "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt via **304-15**: $(f(0) = q) \wedge (g(0) = q)$.

2.2: Via **305-2** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

2.3: Aus $\rightarrow\!)$ "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt via **302-1(Def)**: f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv.

3.1: Aus 2.1
folgt: $f(0) = g(0)$.

3.2: Aus 2.2 und
aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$"
folgt: $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} \subseteq \mathbb{N}$.

4: Aus 3.1 "$f(0) = g(0)$"
folgt via **305-2**: $0 \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$.

...

...

<u>Beweis **305-6**</u>

...

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}.$

...

`5:` Aus `1.1.Fall` “$0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$” ,
aus `3.2` “$\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} \subseteq \mathbb{N}$” und
aus `4` “$0 \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$”
folgt via **305-4**:
$$\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}) \wedge (1 + \Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}).$$

`6.1:` Aus `5` “$\ldots \Omega, 1 + \Omega \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus →) “$\ldots \mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g$”
folgt via **0-4**: $\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, g.$

`6.2:` Aus `5` “$\ldots \Omega \notin \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$”
folgt via **305-2**: $(\Omega \notin \mathsf{dom}\, f) \vee (f(\Omega) = g(\Omega)).$

`6.3:` Aus `5` “$\ldots 1 + \Omega \in \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}$”
folgt: $f(1 + \Omega) \neq g(1 + \Omega).$

`6.4:` Aus `5` “$\ldots \Omega, 1 + \Omega \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus →) “$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \ldots$”
folgt: $\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, f.$

`7.1:` Aus →) “$f \ldots$ Funktion” ,
aus →) “$\ldots \phi$ Funktion” ,
aus `2.3` “$f \ldots$ ist $1 + .$, ϕ-rekursiv” ,
aus `AAII` “A Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus `6.4` “$\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **304-8**: $f(1 + \Omega) = \phi(f(\Omega)).$

`7.2:` Aus →) “$\ldots g, \phi$ Funktion” ,
aus `2.3` “$\ldots g$ ist $1 + .$, ϕ-rekursiv” ,
aus `AAII` “A Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus `6.1` “$\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, g$”
folgt via **304-8**: $g(1 + \Omega) = \phi(g(\Omega)).$

`7.3:` Aus `6.4` “$\Omega \ldots \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus `6.2`
folgt: $f(\Omega) = g(\Omega).$

...

...

Beweis **305-6**

...

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\}.$

...

`8:` Aus `7.3`
folgt: $\phi(f(\Omega)) = \phi(g(\Omega)).$

`9:` Aus `7.2` und
aus `8`
folgt: $\phi(f(\Omega)) = g(1 + \Omega).$

`10:` Aus `9` und
aus `7.1`
folgt: $f(1 + \Omega) = g(1 + \Omega).$

`11:` Es gilt `10`“ $f(1 + \Omega) = g(1 + \Omega)$ ” .
Es gilt `6.3`“ $f(1 + \Omega) \neq g(1 + \Omega)$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “ $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0$ ”

`1.2:` Aus →) “ $f, g \ldots$ Funktion ” und
aus `A1` gleich “ $\{\omega : (\omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\omega) \neq g(\omega))\} = 0$ ”
folgt via **305-2**: $f \subseteq g.$

□

305-7. $\mathbb{N}$ ist eine $\subseteq$ −Kette.

305-7(Satz)

a) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$(n \subseteq m) \vee (m \subseteq n)$".

b) $((1,0),0) \notin \mathsf{A}$.

Beweis **305-7**

`RECH`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $n, m \in \mathbb{N}$.

1: Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n, m \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$n, m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(n \leq m) \vee (m \leq n)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $n \leq m$.
Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N}$" und
aus `2.1.Fall`"$n \leq m$"
folgt via **197-6**: $n \subseteq m$.

`2.2.Fall` $m \leq n$.
Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N}$" und
aus `2.2.Fall`"$m \leq n$"
folgt via **197-6**: $m \subseteq n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n \subseteq m) \vee (m \subseteq n)$.

<u>Beweis **305-7**</u> `b)`

`1:` Es gilt: $(((1,0),0) \in \mathsf{A}) \vee (((1,0),0) \notin \mathsf{A})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $((1,0),0) \in \mathsf{A}$.

`2:` Aus **96-1**“A Funktion” und
aus `1.1.Fall`“$((1,0),0) \in \mathsf{A}$”
folgt via **18-20**: $0 = \mathsf{A}((1,0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 = 1 + 0$.

`4:` Via $+$**schola** gilt: $1 + 0 = 1$.

`5:` Via $\neq$**schola** gilt: $0 \neq 1$.

`6:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $1 + 0 \neq 1 + 0$.

`7:` Es gilt “$1 + 0 = 1 + 0$”.
Es gilt `6`“$1 + 0 \neq 1 + 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $((1,0),0) \notin \mathsf{A}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $((1,0),0) \notin \mathsf{A}$.

□

305-8. Unter den ersten beiden Bedingungen von **305-5,6** und unter "natürlichen" Zusatz-Bedingungen an $\mathsf{dom}\, f, \mathsf{dom}\, g$ entsteht eine $\subseteq$-Kette.

305-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *f, g ist $1 + .,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.*

$\rightarrow$) *f, g, ϕ Funktion.*

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$.

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, g = \mathbb{N})$.

Dann folgt "$(f \subseteq g) \vee (g \subseteq f)$".

Beweis **305-8**

1: Nach →) gilt:

$$(\mathsf{dom}\, f, \mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N})$$
$$\vee((\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}))$$
$$\vee((\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}))$$
$$\vee(\mathsf{dom}\, f, \mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, f, \mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$.

2: Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, f, \mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$"
folgt via **305-7**: $(\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g) \vee (\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

Aus →) "f, g ist $1 + .$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus →) "f, g, ϕ Funktion",
aus `1.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, f \ldots \in \mathbb{N}$" und
aus `2.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **305-5**: $f \subseteq g$.

`2.2.Fall` $\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

3.1: Aus →) "f, g ist $1 + .$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt: g, f ist $1 + .$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

3.2: Aus →) "f, g, ϕ Funktion"
folgt: g, f, ϕ Funktion.

4: Aus 3.1 "g, f ist $1 + .$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus `3.2.Fall` "g, f, ϕ Funktion",
aus `1.1.Fall` "$\ldots \mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$" und
aus `2.2.Fall` "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **305-5**: $g \subseteq f$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(f \subseteq g) \vee (g \subseteq f)$.

...

Beweis **305-8**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **197-4**: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{N}$.

`3:` Aus 2 und
aus `1.2.Fall` "$\ldots \mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

`4:` Aus →) "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus →) "f, g, ϕ Funktion",
aus `1.2.Fall` "$\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus 3 "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **305-5**: $f \subseteq g$.

`1.3.Fall` $(\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N})$.

`2.1:` Aus →) "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt: g, f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`2.2:` Aus →) "f, g, ϕ Funktion"
folgt: g, f, ϕ Funktion.

`2.3:` Aus `1.3.Fall` "$\ldots \mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2.3` und
aus `1.3.Fall` "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `2.1` "g, f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus `2.2` "g, f, ϕ Funktion",
aus `1.3.Fall` "$\ldots \mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$" und
aus 3 "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **305-5**: $g \subseteq f$.

...

Beweis **305-8**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $\mathsf{dom}\, f, \mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}.$

2: Via **0-6** gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}.$

3: Aus 2"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `1.4.Fall`"$\ldots \mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}$"
folgt: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g.$

4: Aus →) "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus →) "f, g, ϕ Funktion",
aus `1.4.Fall`"$\mathsf{dom}\, f \ldots = \mathbb{N}$" und
aus 3"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **305-6**: $f \subseteq g.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(f \subseteq g) \vee (g \subseteq f).$

□

305-9. Unter Einschränkung der Definitions-Bereiche auf $n \in \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}$ steht ein Eindeutigkeits-Resultat zur Verfügung.

305-9(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f, g *ist* $1 + ., \phi$*-rekursiv mit Startwert* $(0, q)$.

$\rightarrow$) f, g, ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$.

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$.

Dann folgt "$f = g$".

<u>Beweis **305-9**</u>

1: Nach $\rightarrow$) gilt: $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

2.2: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

2.3: Aus `1.1.Fall` und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$"
folgt: $\mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$.

2.4: Aus $\rightarrow$) "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt: g, f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

2.5: Aus $\rightarrow$) "f, g, ϕ Funktion"
folgt: g, f, ϕ Funktion.

3.1: Aus $\rightarrow$) "f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus $\rightarrow$) "f, g, ϕ Funktion",
aus `1.1.Fall` "$\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$" und
aus 2.1 "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **305-5**: $f \subseteq g$.

3.2: Aus 2.4 "g, f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$",
aus 2.5 "g, f, ϕ Funktion",
aus 2.3 "$\mathsf{dom}\, g \in \mathbb{N}$" und
aus 2.2 "$\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **305-5**: $g \subseteq f$.

4: Aus 3.1 "$f \subseteq g$" und
aus 3.2 "$g \subseteq f$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = g$.

...

<u>Beweis **305-9**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$ ”
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

`2.2:` Aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$ ”
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, g \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall` und
aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, g$ ”
folgt: $\mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}$.

`2.4:` Aus →) “ f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ”
folgt: g, f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`2.5:` Aus →) “ f, g, ϕ Funktion ”
folgt: g, f, ϕ Funktion.

`3.1:` Aus `1.2.Fall` und
aus `2.1`
folgt: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

`3.2:` Aus `2.3` und
aus `2.2`
folgt: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`4.1:` Aus →) “ f, g ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ” ,
aus →) “ f, g, ϕ Funktion ” ,
aus `1.2.Fall` “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$ ” und
aus `3.1` “ $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, g$ ”
folgt via **305-6**: $f \subseteq g$.

`4.2:` Aus `2.4` “ g, f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ” ,
aus `2.5` “ g, f, ϕ Funktion ” ,
aus `2.3` “ $\mathsf{dom}\, g = \mathbb{N}$ ” und
aus `3.2` “ $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt via **305-6**: $g \subseteq f$.

`5:` Aus `4.1` “ $f \subseteq g$ ” und
aus `4.2` “ $g \subseteq f$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $f = g$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f = g$.

□

305-10. Ergänzend zu den Untersuchungen von **#302** wird zunächst ganz allgemein Hinreichendes dafür formuliert, dass $\{(p,q)\}$ eine $c_E_.,\phi-$rekursive Klasse ist. Hieraus folgt ohne viel Mühe, dass $\{(0,q)\}$ für *jede Menge* q eine $1+.,\phi-$rekursive Klasse ist.

305-10(Satz)

`a)` *Aus "(p,q) Menge" und "$((c,p),p)\notin E$"*
folgt "$\{(p,q)\}$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q)".

`b)` *Aus "q Menge"*
folgt "$\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$".

Beweis **305-10** `a)` `VS` gleich $((p,q)$ Menge$)\wedge(((c,p),p)\notin E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "(p,q) Menge…"
folgt via **PaarAxiom I**: p,q Menge.

`2:` Aus `1`"p,q Menge" und
aus `VS` gleich "…$((c,p),p)\notin E$"
folgt via **302-4**:
$\{(p,q)\}$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv mit Starwert (p,q).

`b)` `VS` gleich q Menge.

`1.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `VS` gleich "q Menge"
folgt: $0,q$ Menge.

`1.2:` Via **305-7** gilt: $((1,0),0)\notin \mathsf{A}$.

`2:` Aus `1.1`"$0,q$ Menge" und
aus `1.2`"$((1,0),0)\notin \mathsf{A}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\{(0,q)\}$ ist $1\_\mathsf{A}\_.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

□

305-11. Bei der Untersuchung von $1+.,\phi-$rekursiven Klassen f (mit Funktionen ϕ) sind die Fälle $\mathsf{dom}\,f\in\mathbb{N}$ oder $\mathsf{dom}\,f=\mathbb{N}$ gelegentlich besonders interessant.

305-11(Definition)

a) $\mathsf{305.1}(x,y,z) = \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,x\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega\in\mathbb{N})\vee(\mathsf{dom}\,\omega=\mathbb{N}))\wedge(y\subseteq\omega\subseteq z)\}.$

b) $\mathsf{305.2}(x,y,z) = \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,x\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega\in\mathbb{N})\vee(\mathsf{dom}\,\omega=\mathbb{N}))\wedge(y\subseteq\omega\subseteq z)\}.$

305-12. Einem "Murphy-artigen Gesetz" folgend wird beim theoretischen Vorausarbeiten mit ziemlicher Sicherheit jene Formulierung getroffen, die später haargenau *nicht* einsetzbar ist.

305-12(Satz) (Archimedes III)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-\Omega < x < \Omega)$.

Beweis **305-12** `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x \leq 0) \vee (0 \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \leq 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `2.1.Fall`"$x \leq 0$"
folgt via **Archimedes II**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-\Omega < x)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots - \Omega < x$" und
aus `2.1.Fall`"$x \leq 0$"
folgt via **107-8**: $-\Omega < 0$.

`5:` Aus `4`"$-\Omega < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < \Omega$.

`6:` Aus `2.1.Fall`"$x \leq 0$" und
aus `5`"$0 < \Omega$"
folgt via **107-8**: $x < \Omega$.

`7:` Aus `3`"$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-\Omega < x)$" und
aus `6`"$x < \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-\Omega < x < \Omega)$.

...

<u>Beweis **305-12**</u> `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $0 \leq x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 \leq x$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes II**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x < \Omega)$.

`4:` Aus `2.2.Fall`"$0 \leq x$" und
aus `3`"$\ldots x < \Omega$"
folgt via **107-8**: $0 < \Omega$.

`5:` Aus `4`"$0 < \Omega$"
folgt via **109-16**: $-\Omega < 0$.

`6:` Aus `5`"$-\Omega < 0$" und
aus `2.2.Fall`"$0 \leq x$"
folgt via **107-8**: $-\Omega < x$.

`7:` Aus `3`"$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (x < \Omega)$" und
aus `6`"$-\Omega < x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-\Omega < x < \Omega)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (-\Omega < x < \Omega).$$

$\square$

305-13. Nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben "klassische" $\leq$ _Suprema/$\leq$ _Infima.

<u>**305-13(Satz)**</u>

a) *Aus* "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x < +\infty$".

b) *Aus* "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$" *folgt* "$-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$".

c) *Aus* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$" *folgt* "$0 \neq x$".

d) *Aus* "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$" *folgt* "$0 \neq x$".

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **305-13**</u> a) VS gleich $0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $x \subseteq \mathbb{S}$.

1.2: Aus VS gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

2.1: Aus 1.1"$x \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ _Infimum von x.

2.2: Aus 1.2"$\ldots \Omega \in x$" und
aus VS gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

3.1: Aus 2.1"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ _Infimum von x" und
aus 1.2"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **36-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \leq \Omega$.

3.2: Aus 2.2"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $\Omega < +\infty$.

4: Aus 3.1"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \leq \Omega$" und
aus 3.2"$\Omega < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x < +\infty$.

<u>Beweis **305-13**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $x \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ _Supremum von x.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ _Supremum von x" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **36-4**: $\Omega \leq \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < \Omega$.

`4:` Aus `3.2`"$-\infty < \Omega$" und
aus `3.1`"$\Omega \leq \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$.

`c)` `VS` gleich $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x = 0$" und
aus **297-9**"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, 0 = +\infty$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = +\infty$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $+\infty = -\infty$.

`4:` Es gilt `3`"$+\infty = -\infty$".
Via **107-6** gilt "$+\infty \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $x = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = 0$.

Beweis **305-13** `d)` `VS` gleich $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

$\boxed{\texttt{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x = 0$" und
aus **297-9** "$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, 0 = -\infty$"
folgt: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = -\infty$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $-\infty = +\infty$.

`4:` Es gilt `3` "$-\infty = +\infty$" .
Via **107-6** gilt "$-\infty \neq +\infty$" .
Ex falso quodlibet folgt: $x = 0$.

$\boxed{\texttt{Ende wfFallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x = 0$.

□

305-14. Es gilt $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$ mit $x \subseteq \mathbb{R}$ unter anderem genau dann, wenn $0 \neq x$ und jedes $\alpha \in x$ durch eine *relle* Zahl untertroffen wird.

305-14(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$x \subseteq \mathbb{R}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$".

`ii)` "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < \alpha))$".

`iii)` "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\alpha))$".

≤-Notation.

Beweis **305-14** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{x \subseteq \mathbb{R}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{R} \ldots$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus **107-6**"$+\infty \neq -\infty$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.2`"$x \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$_Infimum von x.

`3:` Aus `2`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$_Infimum von x" und
aus `1.3`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \neq +\infty$"
folgt via **175-5**: $\boxed{0 \neq x}$

...

Beweis **305-14** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $$(x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty).$$

...

4.1: Es gilt: $$\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\beta < \Phi)))$$ $$\vee (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < \alpha))).$$

wfFallunterscheidung

4.1.1.Fall $$\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\beta < \Phi))).$$

Thema5.1 $$\gamma \in x.$$

6: Aus Thema5.1 "$\gamma \in x$" und aus 4.1.1.Fall "$\ldots \forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\beta < \Phi))$" folgt: $$\neg(\gamma < \Phi).$$

7.1: Aus 4.1.1.Fall "$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via $\in$**SZ**: $$\Phi \in \mathbb{S}.$$

7.2: Aus Thema5.1 "$\gamma \in x$" und aus VS gleich "$x \subseteq \mathbb{R} \ldots$" folgt via **0-4**: $$\gamma \in \mathbb{R}.$$

8: Aus 7.2 "$\gamma \in \mathbb{R}$" folgt via $\in$**SZ**: $$\gamma \in \mathbb{S}.$$

9: Aus 7.1 "$\Phi \in \mathbb{S}$", aus 8 "$\gamma \in \mathbb{S}$" und aus 6 "$\neg(\gamma < \Phi)$" folgt via **178-1**: $$\Phi \leq \gamma.$$

Ergo Thema5.1: | A1 | "$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\Phi \leq \gamma)$" |

...

...

Beweis **305-14** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty)$.

...

`wfFallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $\exists\Phi : (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\forall\beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\beta < \Phi)))$.

...

`5.2:` Aus `4.1.1.Fall`"$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\Phi \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5.2`"$\Phi \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\Phi \leq \gamma)$"
folgt via **157-7**: Φ untere $\leq$ -Schranke von x.

`7:` Aus `2`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ -Infimum von x" und
aus `6`"Φ untere $\leq$ -Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\Phi \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$.

`8:` Aus `4.1.1.Fall`"$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < \Phi$.

`9:` Aus `7` und
aus `8`
folgt via **107-8**: $-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$.

`10:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$" und
aus `9`"$-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$"
folgt: $-\infty < -\infty$.

`11:` Es gilt `10`"$-\infty < -\infty$".
Via **41-5** gilt "$\neg(-\infty < -\infty)$".
Ex falso quodlibet folgt:
$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < \alpha))$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\boxed{\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < \alpha))}$$

Beweis **305-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $$(0 \neq x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < \alpha))).$$

`1.1:` Aus `VS` folgt: $\boxed{0 \neq x \subseteq \mathbb{R}}$

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in \mathbb{N}.$
>
> `2:` Aus Aus `VS` gleich "$\beta \in \mathbb{N}$"
> folgt via **164-6**: $-\beta \in \mathbb{Z}.$
>
> `3:` Aus `2`"$-\beta \in \mathbb{Z}$"
> folgt via **164-5**: $-\beta \in \mathbb{R}.$
>
> `4:` Aus `3`"$-\beta \in \mathbb{R}$" und
> aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < \alpha))$"
> folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\beta).$

Ergo `Thema1.2`: $$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\beta)).$$

Konsequenz: $$\boxed{\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\alpha))}$$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $$(0 \neq x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\alpha))).$$

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{x \subseteq \mathbb{R}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R} \ldots$"

folgt via **305-13**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x < +\infty.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{R} \ldots$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1.3`"$x \subseteq \mathbb{S}$"

folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ _Infimum von x.

Beweis **305-14** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\alpha)))$.

...

`3:` Aus `1.2` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x < +\infty$"

folgt via **107-11**: $(\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \in \mathbb{R}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \in \mathbb{R}$"

folgt via **Archimedes III**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{N}) \wedge (-\Phi < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x)$.

`5:` Aus `4` "$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$" und

aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\alpha))$"

folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Omega < -\Phi)$.

`6:` Aus `5` "$\Omega < -\Phi$" und

aus `4` "$\ldots - \Phi < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$"

folgt via **107-8**: $\Omega < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$.

`7:` Aus `2` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ _Infimum von x" und

aus `5` "$\ldots \Omega \in x \ldots$"

folgt via **36-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \leq \Omega$.

`8:` Aus `6` "$\Omega < \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$" und

aus `7` "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x \leq \Omega$"

folgt via **107-8**: $\Omega < \Omega$.

`9:` Es gilt `8` "$\Omega < \Omega$".

Via **41-5** gilt "$\neg(\Omega < \Omega)$".

Ex falso quodlibet folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$.

`3.2.Fall` $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x = -\infty}$

□

305-15. Es gilt $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$ mit $x \subseteq \mathbb{R}$ unter anderem genau dann, wenn $0 \neq x$ und jedes $\alpha \in x$ durch eine *natürliche* Zahl übertroffen wird.

305-15(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$x \subseteq \mathbb{R}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$".

`ii)` "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))$".

`iii)` "$0 \neq x \subseteq \mathbb{R}$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **305-15** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{x \subseteq \mathbb{R}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{R} \ldots$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus **107-6**"$+\infty \neq -\infty$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \neq -\infty$.

`2:` Aus `1.2`"$x \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$-Supremum von x.

`3:` Aus `2`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$-Supremum von x" und
aus `1.3`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \neq -\infty$"

folgt via **175-5**: $\boxed{0 \neq x}$

...

Beweis **305-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $(x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

...

4.1: Es gilt: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\Phi < \beta)))$
$\vee(\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega)))$.

wfFallunterscheidung

4.1.1.Fall $\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\Phi < \beta)))$.

Thema5.1 $\gamma \in x$.

6: Aus Thema5.1 "$\gamma \in x$" und
aus 4.1.1.Fall "$\ldots \forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\Phi < \beta))$"
folgt: $\neg(\Phi < \gamma)$.

7.1: Aus 4.1.1.Fall "$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\Phi \in \mathbb{S}$.

7.2: Aus Thema5.1 "$\gamma \in x$" und
aus VS gleich "$x \subseteq \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \mathbb{R}$.

8: Aus 7.2 "$\gamma \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\gamma \in \mathbb{S}$.

9: Aus 8 "$\gamma \in \mathbb{S}$",
aus 7.1 "$\Phi \in \mathbb{S}$" und
aus 6 "$\neg(\Phi < \gamma)$"
folgt via **178-1**: $\gamma \leq \Phi$.

Ergo Thema5.1: A1 | "$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma \leq \Phi)$"

...

...

<u>Beweis **305-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

...

`wfFallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{4.1.1.Fall}}$ $\exists\Phi : (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\forall\beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\neg(\Phi < \beta)))$.

...

`5.2:` Aus `4.1.1.Fall`“...$\Phi \in \mathbb{R}$...”
folgt via $\in$**SZ**: $\Phi \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5.2`“$\Phi \in \mathbb{S}$” und
aus `A1` gleich “$\forall\gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma \leq \Phi)$”
folgt via **157-7**: Φ obere $\leq$ _Schranke von x.

`7:` Aus `2`“$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ _Supremum von x” und
aus `6`“Φ obere $\leq$ _Schranke von x”
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x \leq \Phi$.

`8:` Aus `4.1.1.Fall`“...$\Phi \in \mathbb{R}$...”
folgt via **AAVII**: $\Phi < +\infty$.

`9:` Aus `7` und
aus `8`
folgt via **107-8**: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty$.

`10:` Aus `VS` gleich “...$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$” und
aus `9`“$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty$”
folgt: $+\infty < +\infty$.

`11:` Es gilt `10`“$+\infty < +\infty$”.
Via **41-5** gilt “$\neg(+\infty < +\infty)$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\boxed{\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))}$$

Beweis **305-15** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega)))$.

`1.1:` Aus `VS` folgt: $\boxed{0 \neq x \subseteq \mathbb{R}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\beta \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $\beta \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus 2“$\beta \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\beta < \Omega)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\beta < \Omega))$.

Konsequenz: $\boxed{\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))}$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega)))$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $\boxed{x \subseteq \mathbb{R}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \subseteq \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **305-13**: $-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \subseteq \mathbb{R} \ldots$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.3`“$x \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ -Supremum von x.

`3:` Aus `1.2`“$-\infty < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$”
folgt via **107-10**: $(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \in \mathbb{R}) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **305-15** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega)))$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.1.Fall`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \in \mathbb{R}$”
folgt via **Archimedes III**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathbb{N}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \Phi)$.

`5:` Aus `4`“$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\Phi < \Omega)$.

`6:` Aus `4`“$\ldots \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \Phi$” und
aus `5`“$\ldots \Phi < \Omega$”
folgt via **107-8**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \Omega$.

`7:` Aus `2`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$-Supremum von x” und
aus `5`“$\ldots \Omega \in x \ldots$”
folgt via **36-4**: $\Omega \leq \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$.

`8:` Aus `6`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \Omega$” und
aus `7`“$\Omega \leq \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$”
folgt via **107-8**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$.

`9:` Es gilt `8`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$”.
Via **41-5** gilt “$\neg(\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$.

`3.2.Fall` $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty}$

□

305-16. Als Zwischenschritt wird ein auch an sich interessantes Resultat über die Vereinigung von Teilmengen von $\mathbb{N}$ erwähnt.

<u>**305-16(Satz)**</u>

a) *Aus* "$x = 0$" *folgt* "$\bigcup x \in \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$0 \neq x \subseteq \mathbb{N}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty$" *folgt* "$\bigcup x$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* x" *und* "$\bigcup x \in \mathbb{N}$".

c) *Aus* "$x \subseteq \mathbb{N}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$" *folgt* "$\bigcup x = \mathbb{N}$".

d) *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\alpha = \mathbb{N}))$" *folgt* "$(\bigcup x \in \mathbb{N}) \vee (\bigcup x = \mathbb{N})$".

<u>$\leq$**-Notation**</u>.

<u>Beweis **305-16**</u> a) VS gleich $x = 0$.

1: $\bigcup x \overset{\mathsf{VS}}{=} \bigcup 0 \overset{\mathbf{1-14}}{=} 0.$

2: Via $\in$**schola** gilt: $0 \in \mathbb{N}.$

3: Aus 1"$\bigcup x = \ldots = 0$" und aus 2 folgt: $\bigcup x \in \mathbb{N}.$

<u>Beweis **305-16**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{N} \ldots$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty$"
folgt via **41-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.1`"$x \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ -Supremum von x.

`3:` Aus `2`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ -Supremum von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ obere $\leq$ -Schranke von x.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \subseteq \mathbb{N} \ldots$",
aus `4`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ obere $\leq$ -Schranke von x" und
aus `2.2`"$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \neq +\infty$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$: $\exists \Omega : (\Omega$ ist $\leq$ -Maximum von $x) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$.

`5.1:` Aus `4`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ -Maximum von $x \ldots$"
folgt via **38-1(Def)**: $\Omega \in x$.

$\ldots$

<u>Beweis **305-16**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $\alpha \in \bigcup x$.

`6:` Aus `Thema5.2`"$\alpha \in \bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists \Phi : \alpha \in \Phi \in x$.

`7.1:` Aus `6`"$\ldots \Phi \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Phi \in \mathbb{N}$.

`7.2:` Aus `6`"$\ldots \Phi \in x$" und
aus `4`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $x \ldots$"
folgt via **38-4**: $\Phi \leq \Omega$.

`8:` Aus `7.1`"$\Phi \in \mathbb{N}$",
aus `4`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `8.2`"$\Phi \leq \Omega$"
folgt via **197-6**: $\Phi \subseteq \Omega$.

`9:` Aus `6`"$\ldots \alpha \in \Phi \ldots$" und
aus `8`"$\Phi \subseteq \Omega$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \Omega$.

Ergo `Thema5.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup x) \Rightarrow (\alpha \in \Omega)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\bigcup x \subseteq \Omega\text{”}}$

`6:` Aus `5.1`"$\Omega \in x$"
folgt via **1-15**: $\Omega \subseteq \bigcup x$.

`7:` Aus `A1` gleich "$\bigcup x \subseteq \Omega$" und
aus `6`"$\Omega \subseteq \bigcup x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup x = \Omega$.

...

<u>Beweis **305-16**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty)$.

...

`8.1:` Aus `7` und
aus `4`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Maximum von $x \ldots$"
folgt: $\boxed{\bigcup x \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } x}$

`8.2:` Aus `7` und
aus `4`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt: $\boxed{\bigcup x \in \mathbb{N}}$

`c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{N} \ldots$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots\ \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$"
folgt via **305-15**: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\alpha < \Omega))$.

...

<u>Beweis **305-16**</u> `c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\beta \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\beta < \Omega)$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `Thema3.1`"$\beta \in \mathbb{N}$",
aus `5`"$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `4`"$\ldots \beta < \Omega$"
folgt via **197-5**: $\beta \in \Omega$.

`7:` Aus `6`"$\beta \in \Omega$" und
aus `4`"$\ldots \Omega \in x \ldots$"
folgt via **1-12**: $\beta \in \bigcup x$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\beta \in \bigcup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathbb{N} \subseteq \bigcup x\text{"}}$

...

<u>Beweis **305-16**</u> `c)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty).$

...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\beta \in \bigcup x.$

`4:` Aus `Thema3.2`"$\beta \in \bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : \beta \in \Omega \in x.$

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathbb{N}.$

`6:` Aus `5`"$\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $\Omega \subseteq \mathbb{N}.$

`7:` Aus `4`"$\ldots \beta \in \Omega \ldots$" und
aus `6`"$\Omega \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema3.2`: $\forall \beta : (\beta \in \bigcup x) \Rightarrow (\beta \in \mathbb{N}).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{"}\bigcup x \subseteq \mathbb{N}\text{"}}$

`3.3:` Aus `A2` gleich "$\bigcup x \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\mathbb{N} \subseteq \bigcup x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup x = \mathbb{N}.$

Beweis **305-16** `d)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\alpha = \mathbb{N}))$.

`1:` Es gilt: $(\mathbb{N} \in x) \vee (\mathbb{N} \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathbb{N} \in x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$\mathbb{N} \in x$” folgt via **1-15**: $\mathbb{N} \subseteq \bigcup x$.

`Thema3.1` $\beta \in \bigcup x$.

`4:` Aus `Thema3.1`“$\beta \in \bigcup x$” folgt via **1-12**: $\exists\Phi : \beta \in \Phi \in x$.

`5.1:` Aus 4“$\ldots \Phi \in x$” und aus `VS` folgt: $(\Phi \in \mathbb{N}) \vee (\Phi = \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $\Phi \in \mathbb{N}$.

Aus `5.1.1.Fall`“$\Phi \in \mathbb{N}$” folgt via **197-4**: $\Phi \subseteq \mathbb{N}$.

`5.1.2.Fall` $\Phi = \mathbb{N}$.

Aus `5.1.2.Fall`“$\Phi = \mathbb{N}$” folgt via **0-6**: $\Phi \subseteq \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$\Phi \subseteq \mathbb{N}$”

`5.2:` Aus 4“$\ldots \beta \in \Phi \ldots$” und aus `A1` gleich “$\Phi \subseteq \mathbb{N}$” folgt via **0-4**: $\beta \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall\beta : (\beta \in \bigcup x) \Rightarrow (\beta \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\bigcup x \subseteq \mathbb{N}$”

`6:` Aus `A2` gleich “$\bigcup x \subseteq \mathbb{N}$” und aus 2“$\mathbb{N} \subseteq \bigcup x$” folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup x = \mathbb{N}$.

...

<u>Beweis **305-16**</u> `d)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\alpha = \mathbb{N}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathbb{N} \notin x$.

`Thema2.1` $\beta \in x$.

`3.1:` Aus `Thema2.1`"$\beta \in x$" und
aus `1.2.Fall`"$\mathbb{N} \notin x$"
folgt via **0-1**: $\beta \neq \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `Thema2.1`"$\beta \in x$" und
aus `VS`
folt: $(\beta \in \mathbb{N}) \vee (\beta = \mathbb{N})$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\beta \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\beta \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \subseteq \mathbb{N}$"

`2.2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.
`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $x = 0$.

Aus `2.2.1.Fall`"$x = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\bigcup x \in \mathbb{N}$.

...

...

Beweis **305-16** `d)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\alpha = \mathbb{N}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathbb{N} \notin x$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.2.Fall` $0 \neq x$.

`3:` Aus `A1` gleich "$x \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{R}$.

`4:` Aus `2.2.2.Fall`"$0 \neq x$" und
aus 3"$x \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **305-13**: $-\infty < \overset{<}{\mathsf{sup}}\, x$.

`5:` Aus 4"$-\infty < \overset{<}{\mathsf{sup}}\, x$"
folgt via **107-10**: $(\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x \in \mathbb{R}) \vee (\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1.Fall`"$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty$.

`7:` Aus `2.2.2.Fall`"$0 \neq x$",
aus `A1` gleich "$x \subseteq \mathbb{N}$" und
aus 6"$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x < +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\bigcup x \in \mathbb{N}$.

...

...

...

Beweis **305-16** `d)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\alpha = \mathbb{N}))$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathbb{N} \notin x$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.2.Fall` $0 \neq x$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$.

Aus `A1` gleich "$x \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `5.2.Fall` "$\overset{<}{\mathsf{sup}}\, x = +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\bigcup x = \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung`
In beiden Fällen gilt: $(\bigcup x \in \mathbb{N}) \vee (\bigcup x = \mathbb{N})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\bigcup x \in \mathbb{N}) \vee (\bigcup x = \mathbb{N})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\bigcup x \in \mathbb{N}) \vee (\bigcup x = \mathbb{N})$.

□

305-17. Im Hinblick auf die sehr aufwändigen Beweise von **#302,#304** zum Nachweis der Existenz "$\subseteq$maximaler" $1+.,\phi$-rekursiver Klassen sollen hier einige vereinfachende Resultate bewiesen werden.

305-17(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq y$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$"
folgt "$(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$".

b) *Aus* "$x \subseteq y$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq z)$"
folgt "$x \subseteq \mathcal{P}(z)$" *und* "$\bigcup x \subseteq z$".

c) *Aus* "$x \subseteq y$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq z)$" *und* "$z$ *Menge*"
folgt "$\bigcup x$ *Menge*".

d) *Aus* "$0 \neq x \subseteq y$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (z \subseteq \alpha)$" *folgt* "$z \subseteq \bigcup x$".

Beweis **305-17**

$\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$ **7-12(Def)**

<u>Beweis **305-17**</u> `a)`

`VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$”
folgt via **7-13**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (\beta = \mathsf{dom}\,\Omega)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y \ldots$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in y$.

`4:` Aus `3`“$\Omega \in y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in y)$
$\Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$”
folgt: $(\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \beta = \mathsf{dom}\,\Omega$” und
aus `4`
folgt: $(\beta \in \mathbb{N}) \vee (\beta = \mathbb{N})$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}) \Rightarrow ((\beta \in \mathbb{N}) \vee (\beta = \mathbb{N}))$.

Konsequenz via **305-16**:

`A1` | “$(\bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\} \in \mathbb{N}) \vee (\bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in y\} = \mathbb{N})$”

`1.2:` Via **7-16** gilt: $\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \bigcup\{\mathsf{dom}\,\lambda : \lambda \in x\}$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `A1`
folgt: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$.

Beweis **305-17** `b)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq z))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in x$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-4**: $\beta \in y$.

`3:` Aus `2`"$\beta \in x$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq z)$"
folgt: $\beta \subseteq z$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow (\beta \subseteq z)$.

Konsequenz via **0-29**: `A1` | "$x \subseteq \mathcal{P}(z)$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$x \subseteq \mathcal{P}(z)$"

folgt via **1-19**: $\boxed{\bigcup x \subseteq z}$

`c)` `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq z)) \wedge (z \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \subseteq y) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \subseteq z)) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\bigcup x \subseteq z$.

`2:` Aus `1`"$\bigcup x \subseteq z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\bigcup x$ Menge.

<u>Beweis **305-17**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq y) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (z \subseteq \alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in y$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \in y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (z \subseteq \alpha) \ldots$"
folgt: $z \subseteq \Omega$.

`4:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in x$"
folgt via **1-15**: $\Omega \subseteq \bigcup x$.

`5:` Aus `3`"$z \subseteq \Omega$" und
aus `4`"$\Omega \subseteq \bigcup x$"
folgt via **0-6**: $z \subseteq \bigcup x$.

□

305-18. Meine Intuition weist darauf hin, dass auch die "$x = y$-Versionen" der Resultate von **305-17** von Bedeutung sein werden. Also werden diese Derivate, sofern diese noch nicht im LW erscheinen, nun nachgereicht.

305-18(Satz)

a) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$" *folgt* "$(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$".

b) *Aus* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq y)$" *und* "$y$ *Menge*" *folgt* "$x, \bigcup x$ *Menge*".

c) *Aus* "$0 \neq x$" *und* "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (y \subseteq \alpha)$" *folgt* "$y \subseteq \bigcup x$".

<u>Beweis **305-18**</u> `a)` `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$"
folgt via **305-17**: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$.

`b)` `VS` gleich $(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq y)) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2.1:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq y) \ldots$"
folgt via **305-17**: $x \subseteq \mathcal{P}(y)$.

`2.2:` Aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$(\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \subseteq y)) \wedge (y \text{ Menge})$"
folgt via **305-17**: $\boxed{\bigcup x \text{ Menge}}$

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Menge"
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(y)$ Menge.

`4:` Aus `2.1`"$x \subseteq \mathcal{P}(y)$" und
aus `3`"$\mathcal{P}(y)$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`c)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (y \subseteq \alpha))$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$",
aus `1`"$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (y \subseteq \alpha)$"
folgt via **305-17**: $y \subseteq \bigcup x$.

□

305-19. Nun werden die Aussagen von **305-17** und die “Mengen-Aussage” von **305-18** für $\mathtt{305.1}(\phi, v, u)$ adaptiert.

305-19(Satz)

a) *Aus* “$x \subseteq \{\omega : (\omega \textit{ ist } 1+., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” *folgt* “$(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$” *und* “$\bigcup x \subseteq u$”.

b) *Aus* “$x \subseteq \{\omega : (\omega \textit{ ist } 1+., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” *und* “$u$ *Menge*” *folgt* “$\bigcup x$ *Menge*”.

c) *Aus* “$0 \neq x \subseteq \{\omega : (\omega \textit{ ist } 1+., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” *folgt* “$v \subseteq \bigcup x$”.

d) *Aus* “u *Menge*” *folgt* “$\{\omega : (\omega \textit{ ist } 1+., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ *Menge*”.

$\{\omega : (\omega \textit{ ist } 1+., x\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (y \subseteq \omega \subseteq z)\}$ **305-11(Def)**

Beweis **305-19** a) VS gleich $x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

> Thema1.1 $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
>
> Aus Thema1.1
> folgt: $(\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq \mathbb{N})$.

Ergo Thema1.1:

> A1 | "$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$
> $\Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$"

1.2: Aus VS gleich "$x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus A1 gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$
$\Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$"
folgt via **305-17**: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$.

b) VS gleich $(x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \wedge (u \text{ Menge})$.

> Thema1.1 $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
>
> Aus Thema1.1
> folgt: $\alpha \subseteq u$.

Ergo Thema1.1:

> A1 | "$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$"

1.2: Aus VS gleich "$x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}\ldots$",
aus VS gleich "$\ldots u$ Menge" und
aus A1 gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$"
folgt via **305-17**: $\bigcup x$ Menge.

<u>Beweis **305-19**</u> `c)` `VS` gleich $0 \neq x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

> `Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
>
> Aus `Thema1.1`
> folgt: $v \subseteq \alpha$.

Ergo `Thema1.1`:

> `A1` “$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (v \subseteq \alpha)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \Rightarrow (v \subseteq \alpha)$”
folgt via **305-17**: $v \subseteq \bigcup x$.

`d)` `VS` gleich u Menge.

> `Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
>
> Aus `Thema1.1`
> folgt: $\alpha \subseteq u$.

Ergo `Thema1.1`:

> `A1` “$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
> $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “u Menge” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$”
folgt via **305-18**:
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N}))$
$\wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge.

□

305-20(AC). Nach umfangreichen Vorbereitungen kann nun der erste und vielleicht wichtigste "$\subseteq$maximale Fortsetzungssatz" für $1+.,\phi$-rekursive Klassen bewiesen werden.

305-20(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ R *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\,R \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,R = \mathbb{N})$.

$\rightarrow)$ $v \subseteq R \subseteq u$ *Menge.*

Dann folgt:

$$\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$$
$$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

Beweis **305-20(AC)**

$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ **305-11(Def)**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots R \subseteq u$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: R Menge.

2: Aus $\rightarrow)$ "R ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow)$ "$(\mathsf{dom}\,R \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,R = \mathbb{N})$",
aus $\rightarrow)$ "$v \subseteq R \subseteq u \ldots$" und
aus 1.1 "R Menge"
folgt:

$$R \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

3: Aus 2 "$R \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-20**:

A1 | "$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"

...

Beweis **305-20(AC)** ...

1.2: Aus →) "... u Menge"
folgt via **305-19**:

A2	"$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge."

1.3: Via **68-1(Def)**:
$\exists \Psi : \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

Thema2.1 — $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

3.1: Aus 1.3 "... Ψ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})\}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus Thema2.1 "... α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

3.2: Aus 1.3 "... Ψ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus Thema4.1 "... α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$.

Thema4.1 — $\delta \in \alpha$.

5: Aus Thema4.1 "$\delta \in \alpha$" und
aus 3.1 "$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\delta \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

6: Aus 5
folgt: δ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

Ergo Thema4.1:

A3	"$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$"

...

...

Beweis **305-20(AC)**

...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`4.2`: Aus `3.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **305-19**:
$$((\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) = \mathbb{N})) \wedge (\bigcup\alpha \subseteq u).$$

`4.3`: Aus `3.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus →) "$\ldots u$ Menge"
folgt via **305-19**: $\bigcup\alpha$ Menge.

`4.4`: Aus `Thema2.1`"$0 \neq \alpha \ldots$" und
aus `3.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **305-19**: $v \subseteq \bigcup\alpha$.

`5`: Aus `A3` gleich "$\forall\delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$" und
aus `3.2`"$\forall\beta,\gamma : (\beta,\gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$"
folgt via **302-2**: $\bigcup\alpha$ ist $1+., \phi$-rekursiv.

`6`: Aus `5`"$\bigcup\alpha$ ist $1+., \phi$-rekursiv",
aus `4.2`"$(\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) = \mathbb{N}) \ldots$",
aus `4.4`"$v \subseteq \bigcup\alpha$",
aus `4.2`"$\ldots \bigcup\alpha \subseteq u$" und
aus `4.3`"$\bigcup\alpha$ Menge"
folgt:
$$\bigcup\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

Ergo `Thema2.1`:

`A4` | "$\forall\alpha : (0 \neq \alpha \text{ ist } \Psi\text{\_Kette}) \Rightarrow (\bigcup\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$"

...

Beweis **305-20(AC)**

...

2.2: Aus 1.3“... Ψ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” ,
aus A1 gleich “$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” ,
aus A2 gleich “$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge” und
aus A4 gleich “$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \text{ ist } \Psi\text{\_Kette}) \Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$”
folgt via **Lemma von Zorn I*, TeilMengenVersion**:
$\exists \Omega : \Omega \text{ ist } \Psi\text{\_maximales Element von } \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

3: Aus 2.2“... Ω ist Ψ_maximales Element von $\{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”
folgt via **39-1(Def)**:

$$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

4: Aus 3
folgt:

$$(\Omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u).$$

...

Beweis **305-20(AC)**

...

$\boxed{\texttt{Thema5.1}}$ $(\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

`6.1:` Aus 4"... $v \subseteq \Omega$ ..." und
aus `Thema5.1`"... $\Omega \subseteq \alpha$ ..."
folgt via **0-6**: $v \subseteq \alpha$.

`6.2:` Aus `Thema5.1`"... $\alpha \subseteq u$" und
aus →)"... u Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`7:` Aus `Thema5.1`"α ist $1+.,\phi$-rekursiv... ",
aus `Thema5.1`"... $(\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})$ ...",
aus `6.1`"$v \subseteq \alpha$",
aus `Thema5.1`"... $\alpha \subseteq u$" und
aus `6.2`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`8:` Aus `1.3`"... Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$",
aus `Thema5.1`"... $\Omega \subseteq \alpha$ ...",
aus 3"$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (\omega \subseteq u)\}$" und
aus 7"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (\omega \subseteq u)\}$"
folgt via **68-4**: Ω_Ψ_α.

`9:` Aus `2.2`"... Ω ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$",
aus 7"$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } c\_E\_.,\phi\text{-rekursiv}\})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus 8"Ω_Ψ_α"
folgt via **39-1(Def)**: α_Ψ_Ω.

...

...

Beweis **305-20(AC)**

...

$\boxed{\texttt{Thema5.1}}$ $(\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

...

`10:` Aus `2.2`“... Ω ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus `9`“α_Ψ_Ω”
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

`11:` Aus `10`“$\alpha \subseteq \Omega$” und
aus `Thema5.1`“... $\Omega \subseteq \alpha$ ...”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \Omega$.

Ergo `Thema5.1`:

`A5`	“$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$”

`5.2:` Aus `2.2`“$\exists \Omega$ ...”,
aus `4`“$(\Omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}))$
$\wedge(v \subseteq \Omega \subseteq u)$” und
aus `A5` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$
$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$”
folgt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$
$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

□

305-21(AC). Aus **305-20(AC)** ist die "$v = R$-Version" deduzierbar.

305-21(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R ist $1+.,\phi$-rekursiv.*

$\rightarrow\!)$ $(\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$.

$\rightarrow\!)$ *$R \subseteq u$ Menge.*

Dann folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge (\forall \alpha : ((\alpha \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$$
$$\wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

Beweis **305-21(AC)**

1: Via **0-6** gilt: $R \subseteq R$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$(\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$",
aus 1 "$R \subseteq R$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$R \subseteq u$ Menge"
folgt via **305-20(AC)**:

$$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge (\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$$
$$\wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

$\square$

305-22(AC). Die neben $v = R$ interessanteste Anwendung von **305-20(AC)** resultiert für $v = \{(p, q)\}$. Aus den Voraussetzungen folgt ohne allzu viel Mühe $p \in \mathbb{N}$.

305-22(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ R *ist* $1 + ., \phi$*-rekursiv mit Startwert* (p, q).

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$.

$\rightarrow)$ $R \subseteq u$ *Menge.*

Dann folgt:

$$\exists \Omega : (\Omega \textit{ ist } 1 + ., \phi\textit{-rekursiv mit Startwert } (p, q))$$
$$\wedge((\mathsf{dom}\, \Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \Omega = \mathbb{N})) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \textit{ ist } 1 + ., \phi\textit{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\, \alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathbb{N}))$$
$$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

Beweis **305-22(AC)**

1: Aus →) " R ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q) "
folgt via **302-1(Def)**: $(R \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((p,q) \in R)$.

2: Aus 1" ϕ ist $1+.,$ -rekursiv... " ,
aus →) " $(\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$ " und
aus →) " $R \subseteq u$ Menge"
folgt via **305-21(AC)**:

$$\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$$
$$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

3: Aus 1" ... $(p,q) \in R$ " und
aus 2" ... $R \subseteq \Omega$ ... "
folgt via **0-4**: $(p,q) \in \Omega$.

4: Aus 2" ... Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv... " und
aus 3" $(p,q) \in \Omega$ "
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q).

5: Aus 2" $\exists\Omega$ ... " ,
aus 4" Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q) " und
aus 2" ... $((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$
$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$"
folgt:

$$\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv mit Startwert } (p,q)))$$
$$\wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (R \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$$
$$\wedge(\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

□

305-23. Nun werden die Aussagen von **305-17** und die "Mengen-Aussage" von **305-18** für $\mathsf{305.2}(\phi, v, u)$ adaptiert.

305-23(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt "$(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$"
und "$\bigcup x \subseteq u$".

b) *Aus* "$x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
und "u *Menge*"
folgt "$\bigcup x$ *Menge*".

c) *Aus* "$0 \neq x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt "$v \subseteq \bigcup x$".

d) *Aus* "u *Menge*"
folgt "$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ *Menge*".

$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,x\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (y \subseteq \omega \subseteq z)\}$ **305-11(Def)**

<u>Beweis</u> **305-23** `a)` `VS` gleich $x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

> `Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
>
> Aus `Thema1.1` folgt: $(\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha \subseteq \mathbb{N})$.

Ergo `Thema1.1`:

> `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}))$"
folgt via **305-17**: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup x) = \mathbb{N})$.

`b)` `VS` gleich $(x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \wedge (u \text{ Menge})$.

> `Thema1.1` $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
>
> Aus `Thema1.1` folgt: $\alpha \subseteq u$.

Ergo `Thema1.1`:

> `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots u$ Menge" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$"
folgt via **305-17**: $\bigcup x$ Menge.

<u>Beweis **305-23**</u> `c)` `VS` gleich $0 \neq x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`Thema1.1`	$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
Aus `Thema1.1` folgt:	$v \subseteq \alpha$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (v \subseteq \alpha)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\} \Rightarrow (v \subseteq \alpha)$"
folgt via **305-17**: $v \subseteq \bigcup x$.

`d)` `VS` gleich u Menge.

`Thema1.1`	$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.
Aus `Thema1.1` folgt:	$\alpha \subseteq u$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "u Menge" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}) \Rightarrow (\alpha \subseteq u)$"
folgt via **305-18**:
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge.

□

305-24(AC). Nach Vorbereitungen kann nun der erste und vielleicht wichtigste "$\subseteq$maximale Fortsetzungssatz" für $1+.,\phi$-rekursive *Funktionen* bewiesen werden.

305-24(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$.

$\rightarrow)$ $v \subseteq f \subseteq u$ *Menge.*

Dann folgt:

$$\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \textit{ Funktion})$$
$$\wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$$
$$\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\alpha \textit{ Funktion})$$
$$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).$$

Beweis **305-24(AC)**

$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N}))$
$\wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ **305-11(Def)**

1.1: Aus $\rightarrow)$"$\ldots f \subseteq u$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: f Menge.

2: Aus $\rightarrow)$"f ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow)$"f Funktion",
aus $\rightarrow)$"$(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$",
aus $\rightarrow)$"$v \subseteq f \subseteq u\ldots$" und
aus 1.1"f Menge"
folgt:
$f \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

3: Aus 2"$f \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-20**:

A1	"$0 \neq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$ $\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"

Beweis **305-24(AC)**

1.2: Aus →) "... u Menge"
folgt via **305-23**:

A2	"$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge."

1.3: Via **68-1(Def)**:
$\exists \Psi : \Psi$ InklusionsRelation in $\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

Thema2.1 $\qquad 0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

3.1: Aus 1.3"... Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})\}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus Thema2.1"... α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

3.2: Aus 1.3"... Ψ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus Thema4.1"... α ist Ψ_Kette"
folgt via **302-6**:
$\forall \beta, \gamma : (\beta, \gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$.

...

...

Beweis **305-24(AC)**

...

`Thema2.1` $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`Thema4.1` $\delta \in \alpha$.

`5:` Aus `Thema4.1`"$\delta \in \alpha$" und
aus `3.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$)$
$\wedge(\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\delta \in \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`6:` Aus `5`
folgt: δ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

Ergo `Thema4.1`: `A3` "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$)$"

`Thema4.2` $\delta \in \alpha$.

`5:` Aus `Thema4.2`"$\delta \in \alpha$" und
aus `3.1`"$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$)$
$\wedge(\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$"
folgt via **0-4**:
$\delta \in \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`6:` Aus `5`
folgt: δ Funktion.

Ergo `Thema4.1`: `A4` "$\forall \delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta$ Funktion$)$"

...

...

Beweis **305-24(AC)**

...

`Thema2.1` $0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette.

...

`4.3:` Aus `3.1`“$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”
folgt via **305-23**:
$((\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) = \mathbb{N})) \wedge (\bigcup\alpha \subseteq u)$.

`4.4:` Aus `3.1`“$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus →) “$\ldots u$ Menge”
folgt via **305-23**: $\bigcup\alpha$ Menge.

`4.5:` Aus `Thema2.1`“$0 \neq \alpha \ldots$” und
aus `3.1`“$\alpha \subseteq \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”
folgt via **305-23**: $v \subseteq \bigcup\alpha$.

`5.1:` Aus `A3` gleich “$\forall\delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$” und
aus `3.2`“$\forall\beta,\gamma : (\beta,\gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$”
folgt via **302-2**: $\bigcup\alpha$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

`5.2:` Aus `A4` gleich “$\forall\delta : (\delta \in \alpha) \Rightarrow (\delta \text{ Funktion})$” und
aus `3.2`“$\forall\beta,\gamma : (\beta,\gamma \in \alpha) \Rightarrow ((\beta \subseteq \gamma) \vee (\gamma \subseteq \beta))$”
folgt via **301-2**: $\bigcup\alpha$ Funktion.

`6:` Aus `5.1`“$\bigcup\alpha$ ist $1+.,\phi$-rekursiv”,
aus `5.2`“$\bigcup\alpha$ Funktion”,
aus `4.3`“$(\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup\alpha) = \mathbb{N}) \ldots$”,
aus `4.5`“$v \subseteq \bigcup\alpha$”,
aus `4.3`“$\ldots \bigcup\alpha \subseteq u$” und
aus `4.4`“$\bigcup\alpha$ Menge”
folgt:
$$\bigcup\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}.$$

...

Beweis **305-24(AC)**

...

Ergo `Thema2.1`:

`A5` “$\forall\alpha : (0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette) $\Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$) \wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$”

`2.2:` Aus `1.3`“... Ψ InklusionsRelation
in $\{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” ,
aus `A1` gleich “$0 \neq \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” ,
aus `A2` gleich “$\{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$ Menge” und
aus `A5` gleich “$\forall\alpha : (0 \neq \alpha$ ist Ψ_Kette)
$\Rightarrow (\bigcup \alpha \in \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\})$”
folgt via **Lemma von Zorn I*, TeilMengenVersion**:
$\exists\Omega : \Omega$ ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N}))$
$\wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`3:` Aus `2.2`“... Ω ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$) \wedge ((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N}))$
$\wedge(v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”
folgt via **39-1(Def)**:
$\Omega \in \{\omega : (\omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\omega$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`4:` Aus `3`
folgt:
$(\Omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\Omega$ Funktion$) \wedge ((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}))$
$\wedge(v \subseteq \Omega \subseteq u)$.

...

Beweis **305-24(AC)**

...

$\boxed{\texttt{Thema5.1}}$ $(\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

`6.1`: Aus 4“$\ldots v \subseteq \Omega \ldots$” und
aus `Thema5.1`“$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$”
folgt via **0-6**: $v \subseteq \alpha$.

`6.2`: Aus `Thema5.1`“$\ldots \alpha \subseteq u$” und
aus →)“$\ldots u$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`7`: Aus `Thema5.1`“$(\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \ldots$”,
aus `Thema5.1`“$\ldots (\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}) \ldots$”,
aus `6.1`“$v \subseteq \alpha$”,
aus `Thema5.1`“$\ldots \alpha \subseteq u$” und
aus `6.2`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$.

`8`: Aus `1.3`“$\ldots \Psi$ InklusionsRelation in
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”,
aus `Thema5.1`“$\ldots \Omega \subseteq \alpha \ldots$”,
aus 3“$\Omega \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (\omega \subseteq u)\}$” und
aus 7“$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (\omega \subseteq u)\}$”
folgt via **68-4**: Ω_Ψ_α.

`9`: Aus `2.2`“$\ldots \Omega$ ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$”,
aus 7“$\alpha \in \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$” und
aus 8“Ω_Ψ_α”
folgt via **39-1(Def)**: α_Ψ_Ω.

...

...

Beweis **305-24(AC)**

...

Thema5.1 $(\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)$

...

10: Aus 2.2"... Ω ist Ψ_maximales Element von
$\{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \omega \subseteq u)\}$" und
aus 9"α_Ψ_Ω"
folgt via **68-4**: $\alpha \subseteq \Omega$.

11: Aus 10"$\alpha \subseteq \Omega$" und
aus Thema5.1"... $\Omega \subseteq \alpha$ ..."
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\alpha = \Omega$.

Ergo Thema5.1:

A6 "$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"

5.2: Aus 2.2"$\exists \Omega$ ...",
aus 4"$(\Omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$" und
aus A6 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (v \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u))$
$\Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

□

305-25(AC). Aus **305-24(AC)** ist die "$v = f$-Version" deduzierbar.

305-25(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!\!)$ f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow\!\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!\!)$ $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$.

$\rightarrow\!\!)$ $f \subseteq u$ *Menge.*

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\Omega \textit{ Funktion})\\
&\quad \wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)\\
&\quad \wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\alpha \textit{ Funktion})\\
&\qquad\quad \wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).
\end{aligned}$$

Beweis **305-25(AC)**

1: Via **0-6** gilt: $f \subseteq f$.

2: Aus $\rightarrow\!\!)$ "f ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow\!\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!\!)$ "$(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$",
aus 1 "$f \subseteq f$" und
aus $\rightarrow\!\!)$ "$f \subseteq u$ Menge"
folgt via **305-24(AC)**:

$$\begin{aligned}
&\exists\Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion})\\
&\quad \wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)\\
&\quad \wedge(\forall\alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})\\
&\qquad\quad \wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).
\end{aligned}$$

$\square$

305-26(AC). Die neben $v = f$ interessanteste Anwendung von **305-24(AC)** resultiert für $v = \{(p,q)\}$. Aus den Voraussetzungen folgt ohne allzu viel Mühe $p \in \mathbb{N}$.

305-26(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv mit Startwert* (p,q).

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$.

$\rightarrow$) $f \subseteq u$ *Menge.*

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\exists\Omega : (\Omega \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv mit Startwert } (p,q)) \wedge (\Omega \textit{ Funktion})\\
&\quad\wedge((\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)\\
&\quad\wedge(\forall\alpha : ((\alpha \textit{ ist } 1+.,\phi\textit{-rekursiv}) \wedge (\alpha \textit{ Funktion})\\
&\qquad\qquad\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)).
\end{aligned}$$

Beweis **305-26(AC)**

1: Aus →) “ f ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q) ”
folgt via **302-1(Def)**: $(f \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge ((p,q) \in f)$.

2: Aus 1 “ f ist $1+.,\phi$-rekursiv ... ” ,
aus →) “ $(\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N})$ ” ,
aus →) “ f Funktion ” und
aus →) “ $f \subseteq u$ Menge ”
folgt via **305-25(AC)**:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\Omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\, \Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \Omega = \mathbb{N})) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\, \alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

3: Aus 1 “ $\ldots (p,q) \in f$ ” und
aus 2 “ $\ldots f \subseteq \Omega \ldots$ ”
folgt via **0-4**: $(p,q) \in \Omega$.

4: Aus 2 “ $\ldots \Omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv... ” und
aus 3 “ $(p,q) \in \Omega$ ”
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q).

5: Aus 2 “ $\exists \Omega \ldots$ ” ,
aus 4 “ Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (p,q) ” und
aus 2 “ $\ldots (\Omega \text{ Funktion}) \wedge ((\mathsf{dom}\, \Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \Omega = \mathbb{N})) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\, \alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$”
folgt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv mit Startwert } (p,q))) \wedge (\Omega \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\, \Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \Omega = \mathbb{N})) \wedge (f \subseteq \Omega \subseteq u)$
$\wedge(\forall \alpha : ((\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}) \wedge (\alpha \text{ Funktion})$
$\wedge((\mathsf{dom}\, \alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, \alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq u)) \Rightarrow (\alpha = \Omega))$.

□

Mengenlehre: Weiteres über $c\_E\_, \phi$-rekursive Klassen.

Ersterstellung: 25/07/14 **Letzte Änderung: 01/08/14**

306-1. Ist R eine $c\_E\_, \phi$-rekursive Klasse, so gibt es kein Anzeichen dafür, dass R eine Relation sein muss. Die Definitions-Eigenschaften $c\_E\_, \phi$-rekursiver Klassen zielen jedoch auf geordnete Paare ab, die in R sind und die speziell miteinander verknüpft sind. Vor diesem Hintergrund ist es nicht verwunderlich, dass eine Klasse R genau dann $c\_E\_, \phi$-rekursiv ist, wenn die größte in R enthaltene Relation $R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ eine $c\_E\_, \phi$-rekursive Klasse ist.

306-1(Satz) *Die Aussagen* `i)`,`ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *R ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv.*

`ii)` *$R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv.*

<u>Beweis **306-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

`1:` Via **2-7** gilt: $R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq R$.

`2:` Aus `1`“ $R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subseteq R$ ” und
aus `VS` gleich “ R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv ”
folgt via **302-4**: $R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)$.

`2:` Aus `Thema1`“ $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R \ldots$ ”
folgt via **ElementAxiom**: $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ Menge.

`3:` Aus `2`“ $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ Menge ”
folgt via **298-2**: $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`4:` Aus `Thema1`“ $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R \ldots$ ” und
aus `3`“ $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ”
folgt via **2-2**: $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`5:` Aus `VS` gleich “ $R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv ”,
aus `4`“ $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ ” und
aus `Thema1`... $((c, \alpha), \gamma) \in E$
folgt via **302-1(Def)**: $(\beta, \delta) \in \phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow ((\beta, \delta) \in \phi)$.

Konsequenz via **302-1(Def)**: R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

□

306-2. Sind die ersten Einträge geordneter Paare von einer $c\_E\_,\phi$-rekursiven Klasse R entsprechend **302-1(Def)** miteinander verwoben, so sind Aussagen über die zweiten Einträge möglich.

306-2(Satz) *Es gelte:*

→) *R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.*

→) $(p,q),(r,s)\in R$.

→) $((c,p),r)\in E$.

Dann folgt "$q\in \mathsf{dom}\,\phi$" und "$s\in \mathsf{ran}\,\phi$".

Beweis **306-2**

1: Aus →) "R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv",
aus →) "$(p,q),(r,s)\in R$" und
aus →) "$((c,p),r)\in E$"
folgt via **302-1(Def)**: $(q,s)\in\phi$.

2: Aus 1 "$(q,s)\in\phi$"
folgt via **7-5**: $(q\in \mathsf{dom}\,\phi)\wedge(s\in \mathsf{ran}\,\phi)$.

□

306-3. Ist (p,q) in einer $c\_E\_.,\phi$-rekursiven Klasse und hat p bezüglich $c\_E\_.$ sowohl eine "Vorgänger" als auch einen "Nachfolger", so gilt sogar $q \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi)$.

> **306-3(Satz)** *Es gelte:*
>
> $\rightarrow\!)$ *R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.*
>
> $\rightarrow\!)$ $(p,q),(r,s),(n,o) \in R$.
>
> $\rightarrow\!)$ $((c,p),r) \in E$.
>
> $\rightarrow\!)$ $((c,n),p) \in E$.
>
> *Dann folgt* "$q \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi)$".

Beweis **306-3**

1.1: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$(p,q),(r,s)\ldots \in R$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$((c,p),r) \in E$"
folgt via **306-2**: $q \in \mathsf{dom}\,\phi$.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots(n,o) \in R$",
aus $\rightarrow\!)$ "$(p,q)\ldots \in R$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$((c,n),p) \in E$"
folgt via **306-2**: $q \in \mathsf{ran}\,\phi$.

2: Aus 1.1 "$q \in \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus 1.2 "$q \in \mathsf{ran}\,\phi$"
folgt via **2-2**: $q \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi)$.

□

306-4. Hier soll untersucht werden, wann die binäre Vereinigung von zwei Klassen, die $c\_E\_., \phi$-rekursiv sind, wieder $c\_E\_., \phi$-rekursiv ist.

306-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) R, S *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta) \in R) \wedge ((\gamma, \delta) \in S) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow ((\beta, \delta) \in \phi)$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta) \in S) \wedge ((\gamma, \delta) \in R) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow ((\beta, \delta) \in \phi)$.

Dann folgt "$R \cup S$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv".*

Beweis **306-4**

`Thema1` $((\epsilon, \zeta), (\eta, \xi) \in R \cup S) \wedge (((c, \epsilon), \eta) \in E)$.

2: Aus `Thema1` "$(\epsilon, \zeta), (\eta, \xi) \in R \cup S \ldots$"
folgt via **2-2**:

$$(\epsilon, \zeta), (\eta, \xi) \in R$$
$$\vee((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge ((\eta, \xi) \in S))$$
$$\vee((\epsilon, \zeta) \in S) \wedge ((\eta, \xi) \in R)$$
$$\vee((\epsilon, \zeta), (\eta, \xi) \in S).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(\epsilon, \zeta), (\eta, \xi) \in R$.

Aus $\rightarrow$) "$R \ldots$ ist $c\_E\_., \zeta$-rekursiv",
aus `2.1.Fall` "$(\epsilon, \zeta), (\eta, \xi) \in R$" und
aus `Thema1` "$\ldots ((c, \epsilon), \eta) \in E$"
folgt via **302-1(Def)**: $(\zeta, \xi) \in \phi$.

`2.2.Fall` $((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge ((\eta, \xi) \in S)$.

Aus `2.2.Fall` "$((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge ((\eta, \xi) \in S)$",
aus `Thema1` "$\ldots ((c, \epsilon), \eta) \in E$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta) \in R) \wedge ((\gamma, \delta) \in S) \wedge (((c, \alpha), \gamma) \in E)) \Rightarrow ((\beta, \delta) \in \phi)$"
folgt: $(\zeta, \xi) \in \phi$.

...

...

<u>Beweis **306-4**</u>

...

`Thema1` $((\epsilon,\zeta),(\eta,\xi)\in R\cup S)\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $((\epsilon,\zeta)\in S)\wedge((\eta,\xi)\in R)$.

Aus `2.3.Fall` "$((\epsilon,\zeta)\in S)\wedge((\eta,\xi)\in R)$",
aus `Thema1` "$\ldots((c,\epsilon),\eta)\in E$" und
aus →) "$\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta:(((\alpha,\beta)\in S)\wedge((\gamma,\delta)\in R)$
$\wedge(((c,\alpha),\gamma)\in E))\Rightarrow((\beta,\delta)\in\phi)$"
folgt: $(\zeta,\xi)\in\phi$.

`2.4.Fall` $(\epsilon,\zeta),(\eta,\xi)\in S$.

Aus →) "$\ldots S$ ist $c\_E\_.,\zeta$-rekursiv",
aus `2.4.Fall` "$(\epsilon,\zeta),(\eta,\xi)\in S$" und
aus `Thema1` "$\ldots((c,\epsilon),\eta)\in E$"
folgt via **302-1(Def)**: $(\zeta,\xi)\in\phi$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(\zeta,\xi)\in\phi$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall\epsilon,\zeta,\eta,\xi:(((\epsilon,\zeta),(\eta,\xi)\in R\cup S)\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E))\Rightarrow((\zeta,\xi)\in\phi).$$

Konsequenz via **302-1(Def)**: $R\cup S$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

□

306-5. Mit Hilfe von **306-4** soll nun untersucht werden, wann für eine $c\_E\_., \phi$-rekursive Klasse R auch die Klasse $\{(p,q)\} \cup R$ eine $c\_E\_., \phi$-rekursive Klasse ist.

306-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\{(p,q)\}, R$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : (((\alpha, \beta) \in R) \wedge (((c,p),\alpha) \in E)) \Rightarrow ((q,\beta) \in \phi)$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : (((\alpha, \beta) \in R) \wedge (((c,\alpha),p) \in E)) \Rightarrow ((\beta,q) \in \phi)$.

Dann folgt "$\{(p,q)\} \cup R$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv".*

Beweis **306-5**

`Thema1.1` $((\epsilon,\zeta)\in\{(p,q)\})\wedge((\eta,\xi)\in R)\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E)$.

2: Aus `Thema1.1`"$(\epsilon,\zeta)\in\{(p,q)\}\ldots$"
folgt via **259-36**: $(\epsilon=p)\wedge(\zeta=q)$.

3: Aus 2"$\epsilon=p\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(c,\epsilon)=(c,p)$.

4: Aus 3"$(c,\epsilon)=(c,p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((c,\epsilon),\eta)=((c,p),\eta)$.

5: Aus 4 und
aus `Thema1.2`"$\ldots((c,\epsilon),\eta)\in E$"
folgt: $((c,p),\eta)\in E$.

6: Aus `Thema1.1`"$\ldots(\eta,\xi)\in R\ldots$",
aus 5"$((c,p),\eta)\in E$" und
aus →)" $\forall\alpha,\beta:(((\alpha,\beta)\in R)\wedge(((c,p),\alpha)\in E))$
$\Rightarrow((q,\beta)\in\phi)$"
folgt: $(q,\xi)\in\phi$.

7: Aus 2"$\ldots\zeta=q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\zeta,\xi)=(q,\xi)$.

8: Aus 7 und
aus 6
folgt: $(\zeta,\xi)\in\phi$.

Ergo `Thema1.1`:

A1 | "$\forall\epsilon,\zeta,\eta,\xi:(((\epsilon,\zeta)\in\{(p,q)\})\wedge((\eta,\xi)\in R)$
$\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E))\Rightarrow((\zeta,\xi)\in\phi)$"

...

<u>Beweis **306-5**</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $((\epsilon,\zeta)\in R)\wedge((\eta,\xi)\in\{(p,q)\})\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E)$.

`2`: Aus `Thema1.2`"$\ldots(\eta,\xi)\in\{(p,q)\}\ldots$"
folgt via **259-36**: $(\eta=p)\wedge(\xi=q)$.

`3`: Aus `2`"$\eta=p\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((c,\epsilon),\eta)=((c,\epsilon),p)$.

`4`: Aus `3` und
aus `Thema1.2`"$\ldots((c,\epsilon),\eta)\in E$"
folgt: $((c,\epsilon),p)\in E$.

`5`: Aus `Thema1.2`"$(\epsilon,\zeta)\in R\ldots$",
aus `4`"$((c,\epsilon),p)\in E$" und
aus →)"$\forall\alpha,\beta:(((\alpha,\beta)\in R)\wedge(((c,\alpha),p)\in E))$
$\Rightarrow((\beta,q)\in\phi)$"
folgt: $(\zeta,q)\in\phi$.

`6`: Aus `2`"$\ldots\xi=q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\zeta,\xi)=(\zeta,q)$.

`7`: Aus `6` und
aus `5`
folgt: $(\zeta,\xi)\in\phi$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall\epsilon,\zeta,\eta,\xi:(((\epsilon,\zeta)\in R)\wedge((\eta,\xi)\in\{(p,q)\})$ $\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E))\Rightarrow((\zeta,\xi)\in\phi)$"

`1.3`: Aus →)"$\{(p,q)\},R$ ist $c\_E\_,\phi$-rekursiv",
aus `A1` gleich "$\forall\epsilon,\zeta,\eta,\xi:(((\epsilon,\zeta)\in\{(p,q)\})\wedge((\eta,\xi)\in R)$
$\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E))\Rightarrow((\zeta,\xi)\in\phi)$ und
aus `A2` gleich "$\forall\epsilon,\zeta,\eta,\xi:(((\epsilon,\zeta)\in R)\wedge((\eta,\xi)\in\{(p,q)\})$
$\wedge(((c,\epsilon),\eta)\in E))\Rightarrow((\zeta,\xi)\in\phi)$
folgt via **306-4**: $\{(p,q)\}\cup R$ ist $c\_E\_,\phi$-rekursiv.

□

306-6. Nun soll von dem im Hinblick auf $1+.,\phi$-rekursive Klassen besonders interessanten Fall $((c,p),p)\notin E$ - unter dieser Bedingung ist $\{(p,q)\}$ via **302-4** eine $c\_E\_.,\phi$-rekursive Klasse - ausgegangen werden.

306-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.*

$\rightarrow\!)$ $((c,p),p)\notin E$.

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha,\beta:(((\alpha,\beta)\in R)\wedge(((c,p),\alpha)\in E))\Rightarrow((q,\beta)\in\phi)$.

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha,\beta:(((\alpha,\beta)\in R)\wedge(((c,\alpha),p)\in E))\Rightarrow((\beta,q)\in\phi)$.

Dann folgt "$\{(p,q)\}\cup R$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv".

Beweis **306-6**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$((c,p),p)\notin E$"
folgt via **302-4**: $\{(p,q)\}$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

2: Aus 1 "$\{(p,q)\}$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow\!)$ "R ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv",
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha,\beta:(((\alpha,\beta)\in R)\wedge(((c,p),\alpha)\in E))\Rightarrow((q,\beta)\in\phi)$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall\alpha,\beta:(((\alpha,\beta)\in R)\wedge(((c,\alpha),p)\in E))\Rightarrow((\beta,q)\in\phi)$"
folgt via **306-5**: $\{(p,q)\}\cup R$ ist $c\_E\_.,\phi$-rekursiv.

$\square$

306-7. Mitunter kann es hilfreich sein, über Situationen Bescheid zu wissen, in denen die zweite und dritte Bedingung von **306-5** trivial erfüllt ist.

306-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\{(p,q)\}, R$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (((c,p),\alpha),((c,\alpha),p) \notin E)$.

Dann folgt "$\{(p,q)\} \cup R$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv*".

Beweis **306-7**

`Thema1.1` $((\epsilon,\zeta) \in R) \wedge (((c,p),\epsilon) \in E)$.

2: Aus `Thema1.1`"$(\epsilon,\zeta) \in R \ldots$"
folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, R$.

3: Aus 2"$\epsilon \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus $\rightarrow\!)$"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (((c,p),\alpha) \ldots \notin E)$"
folgt: $((c,p),\epsilon) \notin E$.

4: Es gilt 3"$((c,p),\epsilon) \notin E$".
Es gilt `Thema1.1`"$\ldots ((c,p),\epsilon) \in E$".
Ex falso quodlibet folgt: $(q,\zeta) \in \phi$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \epsilon,\zeta : (((\epsilon,\zeta) \in R) \wedge (((c,p),\epsilon) \in E)) \Rightarrow ((q,\zeta) \in \phi)$"

...

<u>Beweis **306-7**</u>

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge (((c, \epsilon), p) \in E).$

2: Aus Thema1.2 "$(\epsilon, \zeta) \in R$"
folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, R.$

3: Aus 2 "$\epsilon \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (\ldots ((c, \alpha), p) \notin E)$"
folgt: $((c, \epsilon), p) \notin E.$

4: Es gilt 3 "$\ldots ((c, \epsilon), p) \notin E$".
Es gilt Thema1.2 "$\ldots ((c, \epsilon), p) \in E$".
Ex falso quodlibet folgt: $(\zeta, q) \in \phi.$

Ergo Thema1.2: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\forall \epsilon, \zeta : (((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge (((c, \epsilon), p) \in E)) \Rightarrow ((\zeta, q) \in \phi)\text{"}}$

1.3: Aus →) "$\{(p, q)\}, R$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv",
aus A1 gleich "$\forall \epsilon, \zeta : (((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge (((c, p), \epsilon) \in E)) \Rightarrow ((q, \zeta) \in \phi)$" und
aus A2 gleich "$\forall \epsilon, \zeta : (((\epsilon, \zeta) \in R) \wedge (((c, \epsilon), p) \in E)) \Rightarrow ((\zeta, q) \in \phi)$"
folgt via **306-5**: $\{(p, q)\} \cup R$ ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv.

□

306-8. Es kann auch vorkommen, dass eine $c\_E\_, , \phi$-rekursive *Funktion* durch geeignetes $\{(p,q)\}$ fortgesetzt werden soll.

306-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\{(p,q)\}, f$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $p \notin \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (((c,p),\alpha) \notin E)$.

$\rightarrow$) $\forall\alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c,\alpha),p) \in E)) \Rightarrow ((f(\alpha),q) \in \phi)$.

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f$ *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv.*

b) $\{(p,q)\} \cup f$ *Funktion.*

Beweis **306-8**

`Thema1.1` $((\epsilon,\zeta) \in f) \wedge (((c,p),\epsilon) \in E)$.

2: Aus `Thema1.1` "$(\epsilon,\zeta) \in f \ldots$"
folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus 2 "$\epsilon \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus $\rightarrow$) "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (((c,p),\alpha) \notin E)$"
folgt: $((c,p),\epsilon) \notin E$.

4: Es gilt 3 "$((c,p),\epsilon) \notin E$".
Es gilt `Thema1.1` "$\ldots ((c,p),\epsilon) \in E$".
Ex falso quodlibet folgt: $(q,\zeta) \in \phi$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall\epsilon,\zeta : (((\epsilon,\zeta) \in f) \wedge (((c,p),\epsilon) \in E)) \Rightarrow ((q,\zeta) \in \phi)$"

...

Beweis **306-8** ...

`Thema1.2` $((\epsilon, \zeta) \in f) \wedge (((c, \epsilon), p) \in E)$.

`2.1:` Aus →) " f Funktion " und
aus `Thema1.2` " $(\epsilon, \zeta) \in f \ldots$ "
folgt via **18-20**: $\zeta = f(\epsilon)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` " $(\epsilon, \zeta) \in f \ldots$ "
folgt via **7-5**: $\epsilon \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2.2` " $\epsilon \in \mathsf{dom}\, f$ " ,
aus `Thema1.2` " $\ldots ((c, \epsilon), p) \in E$ " und
aus →) " $\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \alpha), p) \in E))$
$\Rightarrow ((f(\alpha), q) \in \phi)$ "
folgt: $(f(\epsilon), q) \in \phi$.

`4:` Aus `2.1` " $\zeta = f(\epsilon)$ "
folgt via **PaarAxiom I**: $(\zeta, q) = (f(\epsilon), q)$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`
folgt: $(\zeta, q) \in \phi$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` " $\forall \epsilon, \zeta : (((\epsilon, \zeta) \in f) \wedge (((c, p), \epsilon) \in E)) \Rightarrow ((\zeta, q) \in \phi)$ "

`1.a):` Aus →) " $\{(p, q)\}, f$ ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv " ,
aus `A1` gleich " $\forall \epsilon, \zeta : (((\epsilon, \zeta) \in f) \wedge (((c, p), \epsilon) \in E)) \Rightarrow ((q, \zeta) \in \phi)$ " und
aus `A2` gleich " $\forall \epsilon, \zeta : (((\epsilon, \zeta) \in f) \wedge (((c, \epsilon), p) \in E)) \Rightarrow ((\zeta, q) \in \phi)$ "
folgt via **306-6**: $\{(p, q)\} \cup f$ ist $c\_E\_, \phi$-rekursiv.

`1.b):` Aus →) " $p \notin \mathsf{dom}\, f$ " und
aus →) " f Funktion "
folgt via **261-4**: $\{(p, q)\} \cup f$ Funktion.

□

306-9. Wie in **18-20** gesagt folgt aus $(p,q) \in f$ Funkion die Aussage $q = f(p)$. Diese Einsicht wird hier zu einem Kriterium verschärft.

306-9(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $(p,q) \in f$.

`ii)` "$q = f(p)$" *und* "$p \in \mathsf{dom}\, f$".

Beweis **306-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p,q) \in f$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `VS` gleich "$(p,q) \in f$"

folgt via **18-20**: $\boxed{q = f(p)}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in f$"

folgt via **7-5**: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\, f}$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(q = f(p)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$q = f(p) \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,q) = (p, f(p))$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $(p,q) \in f$.

$\square$

306-10. Aus **306-9** folgt ein Kriterium für $(p,q) \notin f$, f Funktion.

306-10(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $(p,q) \notin f$.

`ii)` $(q \neq f(p)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, f)$.

Beweis **306-10**

`1:` Aus $\rightarrow)$ "f Funktion"
folgt via **306-9**: $((p,q) \in f) \Leftrightarrow ((q = f(p)) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $((p,q) \notin f) \Leftrightarrow ((q \neq f(p)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, f))$.

$\square$

306-11. Auch aus notationellen Gründen wird **306-8** für Algebren in A adaptiert.

306-11(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $((p,q),r) \in \Box$.

`ii)` "$r = p\_\Box\_q$" *und* "$p,q \in A$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **306-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $((p,q),r) \in \Box$.

`1:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A)$.

`2:` Aus `1`"$\Box$ Funktion... " und
aus `VS` gleich "$((p,q),r) \in \Box$"
folgt via **306-9**: $(r = \Box(p,q)) \wedge ((p,q) \in \mathsf{dom}\,\Box)$.

`3.1:` Aus `2`"$r = \Box(p,q)$ ..."
folgt: $\boxed{r = p\_\Box\_q}$

`3.2:` Aus `2`"... $(p,q) \in \mathsf{dom}\,\Box$" und
aus `1`"... $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$"
folgt: $(p,q) \in A \times A$.

`4:` Aus `3.2`"$(p,q) \in A \times A$"
folgt via **6-6**: $\boxed{p,q \in A}$

<u>Beweis **306-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(r = p\_\Box\_q) \wedge (p, q \in A)$.

`1:` Aus →) "□ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in A$"
folgt via **6-6**: $(p, q) \in A \times A$.

`3:` Aus `2` und
aus `1` "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box = A \times A$"
folgt: $(p, q) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

`4:` Aus `1` "□ Funktion…" und
aus `3` "$(p, q) \in \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **18-22**: $((p, q), \Box(p, q)) \in \Box$.

`5:` Aus `VS` gleich "$r = p\_\Box\_q \ldots$"
folgt: $r = \Box(p, q)$.

`6:` Aus `5` "$r = \Box(p, q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, q), r) = ((p, q), \Box(p, q))$.

`7:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $((p, q), r) \in \Box$.

□

306-12. Aus **306-11** folgt ein Kriterium für $((p,q),r) \notin \Box$, $\Box$ Algebra in A.

306-12(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $((p,q),r) \notin \Box$.

`ii)` *"*$r \neq p\_\Box\_q$*" oder "*$p \notin A$*" oder "*$q \notin A$*".*

`ALG`-**Notation**.

Beweis **306-12**

`1:` Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **306-11**: $$(((p,q),r) \in \Box) \Leftrightarrow ((r = p\_\Box\_q) \wedge (p,q \in A)).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(((p,q),r) \notin \Box) \Leftrightarrow ((r \neq p\_\Box\_q) \vee (p \notin A) \vee (q \notin A)).$$

$\Box$

306-13. Ist f eine $c\_\Box\_.,\phi$-rekursive Funktion und ist $\Box$ eine Algebra in A, so ergibt sich eine modifizierte Version von **306-8**.

306-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\{(p,q)\}, f$ *ist* $c\_\Box\_.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\Box$ *Algebra in* A*.*

$\rightarrow)$ $p, c\_\Box\_p \notin \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\alpha)) \Rightarrow ((f(\alpha), q) \in \phi)$.

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f$ *ist* $c\_\Box\_.,\phi$*-rekursiv.*

b) $\{(p,q)\} \cup f$ *Funktion.*

ALG-**Notation**.

Beweis **306-13**

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus Thema1.1 "$\beta \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus $\rightarrow)$ "$\ldots c\_\Box\_p \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-1**: $\beta \neq c\_\Box\_p$.

3: Aus $\rightarrow)$ "$\Box$ Algebra in A" und
aus 2 "$\beta \neq c\_\Box\_p$"
folgt via **306-12**: $((c,p),\beta) \notin \Box$.

Ergo Thema1.1: A1 | "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (((c,p),\beta) \notin \Box)$"

...

Beweis **306-13** . . .

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \beta), p) \in \Box)$.

2: Aus →) “ $\Box$ Algebra in A ” und
aus Thema1.2 “ $((c, \beta), p) \in \Box$ ”
folgt via **306-11**: $p = c\_\Box\_\beta$.

3: Aus Thema1.2 “ $\beta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” ,
aus 2 “ $p = c\_\Box\_\beta$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\alpha))$
$\Rightarrow ((f(\alpha), q) \in \phi)$ ”
folgt: $(f(\beta), q) \in \phi$.

Ergo Thema1.2 $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} \forall \beta : ((\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \beta), p) \in \Box)) \Rightarrow ((f(\beta), q) \in \phi) \text{”}}$

1.3: Aus →) “ $\{(p, q)\}, f$ ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv ” ,
aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $p \ldots \notin \mathsf{dom}\, f$ ” ,
aus A1 gleich “ $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (((c, p), \beta) \notin \Box)$ ” und
aus A2 gleich “ $\forall \beta : ((\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (((c, \beta), p) \in \Box)) \Rightarrow ((f(\beta), q) \in \phi)$ ”
folgt via **306-8**:
$(\{(p, q)\} \cup f$ ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv$) \wedge (\{(p, q)\} \cup f$ Funktion$)$.

$\Box$

306-14. Ist f eine $c\_\Box\_.,\phi$-rekursive Funktion, ist $\Box$ eine Algebra in A und ist ϕ eine Funktion, so ergibt sich eine modifizierte Version von **306-13**.

306-14(Satz) *Es gelte:*

→) $\{(p,q)\}, f$ *ist* $c\_\Box\_.,\phi$*-rekursiv.*

→) f, ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $p, c\_\Box\_p \notin \mathsf{dom}\, f$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\alpha)) \Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))$.

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f$ *ist* $c\_\Box\_.,\phi$*-rekursiv.*

b) $\{(p,q)\} \cup f$ *Funktion.*

`ALG`-**Notation**.

Beweis **306-14**

1: Es gilt: $(\forall\beta : ((\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\beta)) \Rightarrow (f(\beta) \in \mathsf{dom}\, \phi))$
$\vee(\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\Omega) \wedge (f(\Omega) \notin \mathsf{dom}\, \phi))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\forall\beta : ((\beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\beta)) \Rightarrow (f(\beta) \in \mathsf{dom}\, \phi)$.

`Thema2.1` $(\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\gamma)$.

3.1: Aus `Thema2.1` "$(\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\gamma)$" und
aus →) "$\forall\alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\alpha))$
$\Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))$"
folgt: $q = \phi(f(\gamma))$.

3.2: Aus `Thema2.1` "$(\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\gamma)$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $f(\gamma) \in \mathsf{dom}\, \phi$.

4: Aus →) "ϕ Funktion" und
aus 3.2 "$f(\gamma) \in \mathsf{dom}\, \phi$"
folgt via **18-22**: $(f(\gamma), \phi(f(\gamma))) \in \phi$.

5: Aus 3.1 "$q = \phi(f(\gamma))$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(f(\gamma), q) = (f(\gamma), \phi(f(\gamma)))$.

6: Aus 5 und
aus 4
folgt: $(f(\gamma), q) \in \phi$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall\gamma : ((\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\gamma)) \Rightarrow ((f(\gamma), q) \in \phi)$"

2.2: Aus →) "$\{(p, q)\}, f$ ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv",
aus →) "$f \ldots$ Funktion",
aus →) "$\Box$ Algebra in A",
aus →) "$p, c\_\Box\_p \notin \mathsf{dom}\, f$" und
aus `A1` gleich "$\forall\gamma : ((\gamma \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\gamma)) \Rightarrow ((f(\gamma), q) \in \phi)$"
folgt via **306-13**:
$(\{(p, q)\} \cup f$ ist $c\_\Box\_., \phi$-rekursiv$) \wedge (\{(p, q)\} \cup f$ Funktion$)$.

...

<u>Beweis **306-14**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\Omega) \wedge (f(\Omega) \notin \mathsf{dom}\, \phi)$.

2: Aus `1.2.Fall`"... $(\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\Omega)$..." und aus →) "$\forall\alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = c\_\Box\_\alpha)) \Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))$" folgt: $q = \phi(f(\Omega))$.

3: Aus `1.2.Fall`"... $f(\Omega) \notin \mathsf{dom}\, \phi$" folgt via **17-4**: $\phi(f(\Omega))$ Unmenge.

4: Aus 3 und aus 2 folgt: q Unmenge.

5: Aus 4"q Unmenge" folgt via **259-36**: $\{(p, q)\} = 0$.

6: Via **2-17** gilt: $0 \cup f = f$.

7: Aus 6 und aus 5 folgt: $\{(p, q)\} \cup f = f$.

8.1: Aus →) "... f ist $c\_\Box\_.$, ϕ-rekursiv" und aus 7 folgt: $\{(p, q)\} \cup f$ ist $c\_\Box\_.$, ϕ-rekursiv.

8.2: Aus →) "f Funktion" und aus 7 folgt: $\{(p, q)\} \cup f$ Funktion.

9: Aus 8.1 und aus 8.2 folgt:

$$(\{(p, q)\} \cup f \text{ ist } c\_\Box\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\{(p, q)\} \cup f \text{ Funktion}).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\{(p, q)\} \cup f \text{ ist } c\_\Box\_., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (\{(p, q)\} \cup f \text{ Funktion}).$$

□

306-15. Wie in einem Besenwagen werden am Ende dieses Essays noch nicht bewiesene Resultate gesammelt.

<u>**306-15(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) R *ist* $c\_E\_., \phi$*-rekursiv mit Startwert* (p, q).

Dann folgt:

a) $p, q, (p, q)$ *Menge.*

b) $0 \neq R$.

c) "$p \in \mathsf{dom}\, R$" *und* "$q \in \mathsf{ran}\, R$".

d) $0 \neq \mathsf{dom}\, R, \mathsf{ran}\, R$.

<u>Beweis **306-15**</u> a)

1: Aus $\rightarrow$) "R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)"
folgt via **302-1(Def)**: $(p, q) \in R$.

2: Aus 1 "$(p, q) \in R$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{(p, q) \text{ Menge}}$

3: Aus 2 "(p, q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $\boxed{p, q \text{ Menge}}$

b)

1: Aus $\rightarrow$) "R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p, q)"
folgt via **302-1(Def)**: $(p, q) \in R$.

2: Aus 1 "$(p, q) \in R$"
folgt via **0-20**: $0 \neq R$.

<u>Beweis **306-15**</u> `cd)`

`1:` Aus →) “ R ist $c\_E\_., \phi$-rekursiv mit Startwert (p,q) ”
folgt via **302-1(Def)**: $(p,q)\in R$.

`2.c):` Aus `1` “ $(p,q)\in R$ ”
folgt via **7-5**: $(p\in \mathsf{dom}\,R)\wedge(q\in \mathsf{ran}\,R)$.

`3.1:` Aus `2.c)` “ $p\in \mathsf{dom}\,R\ldots$ ”
folgt via **0-20**: $0\neq \mathsf{dom}\,R$.

`3.2:` Aus `2.c)` “ $\ldots q\in \mathsf{ran}\,R$ ”
folgt via **0-20**: $0\neq \mathsf{ran}\,R$.

`4.d):` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $0\neq \mathsf{dom}\,R,\mathsf{ran}\,R$.

□

Analysis: Weiteres über $1+.$, ϕ-rekursive Klassen mit Definitions-Bereich$\in\mathbb{N}$ oder $=\mathbb{N}$.

Ersterstellung: 25/07/14 **Letzte Änderung: 27/08/14**

307-1. Einer der weniger schönen Nebenaspekte der Sprache des LWs ist es, Resultate wie Vorliegende beweisen zu müssen.

307-1(Satz)

a) *"$-1+(-1+x)=-2+x$" und "$1+(1+x)=2+x$".*

b) *Aus "$(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$" und "$y=1+x$" folgt "$-1+y=x$".*

c) *Aus "$x\le -1+y$" folgt "$-1+x\le -2+y$".*

d) *Aus "$y<-1+x$" folgt "$1+y<x$".*

e) *Aus "$x\in\mathbb{R}$" folgt "$x<1+x$" und "$x<2+x$" und "$1+x<2+x$" und "$-1+x<x$".*

RECH.$\le$**-Notation**.

Beweis **307-1** a)

1.1: $$-1+(-1+x)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+(-1))+x\stackrel{+\textbf{scola}}{=}-2+x.$$

1.2: $$1+(1+x)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(1+1)+x\stackrel{+\textbf{scola}}{=}2+x.$$

2.1: Aus 1.1

folgt: $$\boxed{-1+(-1+x)=-2+x}$$

2.2: Aus 1.2

folgt: $$\boxed{1+(1+x)=2+x}$$

b) VS gleich $$(x\text{ Zahl})\vee(x=\mathcal{U}))\wedge(y=1+x).$$

1: Aus VS gleich "$(x$ Zahl$)\vee(x=\mathcal{U})$"
folgt via **FSA0**: $$0+x=x.$$

2: $$-1+y\stackrel{\texttt{VS}}{=}-1+(1+x)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+1)+x\stackrel{+\textbf{schola}}{=}0+x\stackrel{1}{=}x.$$

3: Aus 2
folgt: $$-1+y=x.$$

Beweis **307-1** `c)` `VS` gleich $x \leq -1+y.$

`1:` Via $\in$**schola** gilt: $-1 \in \mathbb{R}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq -1+y$" und
aus `1` "$-1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $-1+x \leq -1+(-1+y).$

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $-1+(-1+y) = -2+y.$

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $-1+x \leq -2+y.$

`d)` `VS` gleich $y < -1+x.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < -1+x$"
folgt via **107-9**: $-1+x \in \mathbb{S}.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < -1+x$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$<$: $1+y < 1+(-1+x)$

`2:` Aus `1.1` "$-1+x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $-1+x$ Zahl.

`3:` Aus `2` "$-1+x$ Zahl"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl"
folgt via **300-5**: $1+(-1+x) = x.$

`5:` Aus `2` und
aus `4`
folgt: $1+y < x.$

`e)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$",
aus $\neq$**schola**"$0 \neq 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-2**: $x < x+1.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$",
aus $\neq$**schola**"$0 \neq 2$" und
aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-2**: $x < x+2.$

...

<u>Beweis **307-1**</u> `e)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

...

`1.3:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $1 + x \in \mathbb{R}$.

`1.4:` Via **FSA** gilt: $x + 1 = 1 + x$.

`1.5:` Via **FSA** gilt: $x + 2 = 2 + x$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.4`
folgt: $\boxed{x < 1 + x}$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.5`
folgt: $\boxed{x < 2 + x}$

`2.3:` Aus `1.3`"$1 + x \in \mathbb{R}$",
aus $\neq$**schola**"$0 \neq 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-2**: $1 + x < 1 + (1 + x)$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $1 + (1 + x) = 2 + x$.

`4:` Aus `2.3` und
aus `3`
folgt: $\boxed{1 + x < 2 + x}$

`5:` Aus `2.1`"$x < 1 + x$" und
aus `4`"$1 + x < 2 + x$"
folgt via **107-8**: $\boxed{x < 2 + x}$

□

307-2. Als Hilfs-Satz sollen einige Resultate über Elemente von $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

307-2(Satz)

a) *Aus* “$x \in n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$x \in \mathbb{N}$” *und* “$0 \le x \le -1+n$” *und* “$x < n$”.

b) *Aus* “$n, m \in \mathbb{N}$” *und* “$n \le -1+m$” *folgt* “$-1+m \in \mathbb{N}$”.

c) “$0 \neq n \in \mathbb{N}$” *genau dann, wenn* “$-1+n \in \mathbb{N}$”.

d) *Aus* “$0 \neq n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$-1+n \in n$”.

e) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$\bigcup n \subseteq -1+n$”.

f) *Aus* “$0 \neq n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$\bigcup n = -1+n$”.

g) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$0 \neq 1+n \in \mathbb{N}$”.

h) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$\bigcup(1+n) = n$”.

i) *Aus* “$n, m \in \mathbb{N}$” *und* “$0 < n < -1+m$” *folgt* “$-1+n, n, 1+n \in m$”.

RECH.$\le$-**Notation**.

<u>Beweis **307-2**</u> `a)` `VS` gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $n \subseteq \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **237-6**: $n = \{0, \ldots, -1+n\}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \in n \ldots$" und
aus `1`"$n \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **0-4**: $\boxed{x \in \mathbb{N}}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \in n \ldots$" und
aus `1.2`
folgt: $x \in \{0, \ldots, -1+n\}$.

`3.1:` Aus `2.2`"$x \in \{0, \ldots, -1+n\}$"
folgt via **169-2**: $\boxed{0 \leq x \leq -1+n}$

`3.2:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `VS` gleich "$x \in n \ldots$"
folgt via **197-5**: $\boxed{x < n}$

<u>Beweis</u> **307-2** `b)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n \le -1+m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $0 \le n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{Z}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$0 \le n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \le -1+m$"
folgt via **107-8**: $0 \le -1+m$.

`2.2:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $-1+m \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2.1`"$0 \le -1+m$" und
aus `2.2`"$-1+m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-6**: $-1+m \in \mathbb{N}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 \ne n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \ne n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1+\Omega)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: Ω Zahl.

`3:` Aus `1`"$\ldots n = 1+\Omega$" und
aus `2`"Ω Zahl"
folgt via **307-1**: $-1+n = \Omega$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $-1+n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **307-2**</u> `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-1+n\in\mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-1+n\in\mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $-1+n$ Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$-1+n\in\mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1+(-1+n)\in\mathbb{N}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$-1+n\in\mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $-1+n\in\mathbb{R}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich “$-1+n\in\mathbb{N}$”
folgt via **164-6**: $0\le -1+n$

`2.1:` Aus `1.1`“$-1+n$ Zahl”
folgt via **96-13**: n Zahl.

`2.2:` Aus `1.3`“$-1+n\in\mathbb{R}$”
folgt via **307-1**: $-1+n<1+(-1+n)$.

`3:` Aus `2.1`“n Zahl”
folgt via **FSA0**: $0+n=n$.

`4:` $$n\stackrel{3}{=}0+n\stackrel{+\textbf{schola}}{=}(1+(-1))+n\stackrel{\textbf{FSA}}{=}1+(-1+n).$$

`5.1:` Aus `4`“$n=\ldots=1+(-1+n)$” und aus `1.2`
folgt: $\boxed{n\in\mathbb{N}}$

`5.2:` Aus `4`“$n=\ldots=1+(-1+n)$” und
aus `2.2`
folgt: $-1+n<n$.

`6:` Aus `1.4`“$0\le -1+n$” und
aus `5.2`“$-1+n<n$”
folgt via **107-8**: $0<n$.

`7:` Aus `6`“$0<n$”
folgt via **41-3**: $\boxed{0\neq n}$

<u>Beweis</u> **307-2** `d)` `VS` gleich $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1`"$n \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-1 + n < n$.

`3:` Aus `1.2`"$-1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `2`"$-1 + n < n$"
folgt via **197-5**: $-1 + n \in n$.

<u>Beweis</u> **307-2** `e)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \bigcup n$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \bigcup n$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : \alpha \in \Omega \in n$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in n$" und
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \leq -1 + n)$.

`4.1:` Aus `2` "$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus `3` "$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \Omega)$.

`4.2:` Aus `3` "$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus `3` "$\ldots \Omega \leq -1 + n$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-1 + n \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4.1` "$\ldots \alpha < \Omega$" und
aus `3` "$\ldots \Omega \leq -1 + n$"
folgt via **107-8**: $\alpha < -1 + n$.

`6:` Aus `4.1` "$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus `4.2` "$-1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `5` "$\alpha < -1 + n$"
folgt via **197-5**: $\alpha \in -1 + n$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup n) \Rightarrow (\alpha \in -1 + n)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\bigcup n \subseteq -1 + n$.

<u>Beweis **307-2**</u> `f)` `VS` gleich $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

> `Thema1.1` $\alpha \in -1 + n$.
>
> `2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq n \in \mathbb{N}$"
> folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-1 + n \in \mathbb{N}$.
>
> `3:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in -1 + n$" und
> aus `2`"$-1 + n \in \mathbb{N}$"
> folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
> $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < -1 + n)$.
>
> `4:` Aus `3`"$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$",
> aus `2`"$-1 + n \in \mathbb{N}$" und
> aus `3`"$\alpha < -1 + n$"
> folgt via **197-5**: $\alpha \in -1 + n$.
>
> `5:` Aus `VS` gleich "$0 \neq n \in \mathbb{N}$"
> folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $-1 + n \in n$.
>
> `6:` Aus `4`"$\alpha \in -1 + n$" und
> aus `5`"$-1 + n \in n$"
> folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup n$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in -1 + n) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup n)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$-1 + n \subseteq \bigcup n$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\bigcup n \subseteq -1 + n$.

`2:` Aus `1.2`"$\bigcup n \subseteq -1 + n$" und
aus `A1` gleich "$-1 + n \subseteq \bigcup n$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup n = -1 + n$.

<u>Beweis</u> **307-2** `g)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $\boxed{1 + n \in \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.2`"$n \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $n < 1 + n$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $0 \leq n$.

`4:` Aus `3`"$0 \leq n$" und
aus `2`"$n < 1 + n$"
folgt via **107-8**: $0 < 1 + n$.

`5:` Aus `4`"$0 < 1 + n$"
folgt via **41-3**: $\boxed{0 \neq 1 + n}$

`h)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $0 \neq 1 + n \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1.1`"n Zahl"
folgt via **300-5**: $-1 + (1 + n) = n$.

`2.2:` Aus `1.2`"$0 \neq 1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\bigcup(1 + n) = -1 + (1 + n)$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.1`
folgt: $\bigcup(1 + n) = n$.

<u>Beweis **307-2**</u> `i)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (0 < n < -1 + m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < n \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: m Zahl.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$0 \neq n$" und
aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-1 + n \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.4`"$n \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $-1 + n < n$.

`2.3:` Aus `1.4`"$n \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $n < 1 + n$.

`2.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots n < -1 + m$"
folgt via **307-1**: $1 + n < m$.

`3.1:` Aus `2.2`$-1 + n < n$ und
aus `2.3`"$n < 1 + n$"
folgt via **107-8**: $-1 + n < 1 + n$.

`3.2:` Aus `2.3`"$n < 1 + n$" und
aus `2.4`"$1 + n < m$"
folgt via **107-8**: $n < m$.

`3.3:` Aus `1.2`"$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.4`"$1 + n < m$"
folgt via **197-5**: $\boxed{1 + n \in m}$

...

<u>Beweis **307-2**</u> `i)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (0 < n < -1 + m)$.

...

`4.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `3.2`"$n < m$"

folgt via **197-5**: $\boxed{n \in m}$

`4.2:` Aus `3.1`"$-1 + n < 1 + n$" und
aus `2.4`"$1 + n < m$"
folgt via **107-8**: $-1 + n < m$.

`5:` Aus `2.1`"$-1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `4.2`"$-1 + n < m$"

folgt via **197-5**: $\boxed{-1 + n \in m}$

□

307-3. Zunächst wird **304-1** verschärft und dann auf Algebren in A angewendet.

307-3(Satz)

a) "$(f$ *Funktion*$) \wedge ((p, f(p)) \in f)$"
genau dann, wenn "$(f$ *Funktion*$) \wedge (f(p)$ *Menge*$)$".

b) "$(\Box$ *Algebra in* $A) \wedge (((p, q), p_-\Box_-q) \in \Box)$"
genau dann, wenn "$(\Box$ *Algebra in* $A) \wedge (p_-\Box_-q$ *Menge*$)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **307-3** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(f$ Funktion$) \wedge ((p, f(p)) \in f)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{f \text{ Funktion}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, f(p)) \in f$"

folgt via **9-15**: $\boxed{f(p) \text{ Menge}}$

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(f$ Funktion$) \wedge (f(p)$ Menge$)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{f \text{ Funktion}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f(p)$ Menge$)$"

folgt via **304-1**: $\boxed{(p, f(p)) \in f}$

<u>Beweis **307-3**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (((p,q), p\_\square\_q) \in \square)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{\square \text{ Algebra in } A}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((p,q), p\_\square\_q) \in \square$"

folgt via **9-15**: $\boxed{p\_\square\_q \text{ Menge}}$

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (p\_\square\_q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{\square \text{ Algebra in } A}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\square$ Funktion.

`2:` Aus `1.2`"$\square$ Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\_\square\_q$ Menge"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{((p,q), p\_\square\_q) \in \square}$

$\square$

307-4. Handelt es sich bei R um eine $1+.,\phi$-rekursive Klasse mit $\mathsf{dom}\,R\in\mathbb{N}$, und gilt $0<n<-1+\mathsf{dom}\,R$, so ist für q mit $(n,q)\in R$ die Aussage $q\in(\mathsf{dom}\,\phi)\cap(\mathsf{ran}\,\phi)$ verfügbar.

307-4(Satz) *Es gelte:*

→) *R ist $1+.,\phi$-rekursiv.*

→) $\mathsf{dom}\,R\in\mathbb{N}$.

→) $0<n<-1+\mathsf{dom}\,R$.

→) $(n,q)\in R$.

Dann folgt “$q\in(\mathsf{dom}\,\phi)\cap(\mathsf{ran}\,\phi)$”.

RECH-**Notation**.

Beweis **307-4**

1: Aus →) “$(n,q)\in R$”
folgt via **7-5**: $n\in\mathsf{dom}\,R$.

2: Aus 1“$n\in\mathsf{dom}\,R$” und
aus →) “$\mathsf{dom}\,R\in\mathbb{N}$”
folgt via **307-2**: $n\in\mathbb{N}$.

3.1: Aus 2“$n\in\mathbb{N}$”,
aus →) “$\mathsf{dom}\,R\in\mathbb{N}$” und
aus →) “$0<n<-1+\mathsf{dom}\,R$”
folgt via **307-2**: $-1+n,n,1+n\in\mathsf{dom}\,R$.

3.2: Aus 2“$n\in\mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: n Zahl.

3.3: Aus 2“$n\in\mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

...

Beweis **307-4** . . .

4.1: Aus 3.1"$-1+n\ldots \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (-1+n,\Omega) \in R.$

4.2: Aus 3.1"$\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **7-7**: $\exists\Phi : (1+n,\Phi) \in R.$

4.3: Aus 3.2"n Zahl"
folgt via **300-5**: $1+(-1+n) = n.$

4.4: Aus 3.1"$\ldots 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

5.1: Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus 4.4"$1+n$ Menge"
folgt via **307-3**: $((1,n),1+n) \in \mathsf{A}.$

5.2: Aus 4.3"$1+(-1+n) = n$" und
aus 3.3"n Menge"
folgt: $1+(-1+n)$ Menge.

6: Aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus 5.2"$1+(-1+n)$ Menge"
folgt via **307-3**: $((1,-1+n),1+(-1+n)) \in \mathsf{A}.$

7: Aus 4.3"$1+(-1+n) = n$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((1,-1+n),1+(-1+n)) = ((1,-1+n),n).$

8: Aus 6 und
aus 7
folgt: $((1,-1+n),n) \in \mathsf{A}.$

9: Aus →)"R ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus 4.1"$\ldots(-1+n,\Omega) \in R$",
aus →)"$(n,q) \in R$",
aus 4.2"$\ldots(1+n,\Phi) \in R$",
aus 8"$((1,-1+n),n) \in \mathsf{A}$" und
aus 5.1"$((1,n),1+n) \in \mathsf{A}$"
folgt via **306-3**: $q \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi).$

$\square$

307-5. Von **307-4** ist auch eine “$\mathsf{dom}\,R=\mathbb{N}$-Version” verfügbar.

<u>**307-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow)$ R *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\,R=\mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $0\neq n\in\mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $(n,q)\in R$.

Dann folgt “$q\in(\mathsf{dom}\,\phi)\cap(\mathsf{ran}\,\phi)$”.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **307-5**</u>

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

`1.1:` Aus $\rightarrow)$“$0\neq n\in\mathbb{N}$”
folgt via **162-2**: $0<n\in\mathbb{N}$.

`1.2:` Aus $\in$**scola**“$2\in\mathbb{N}$” und
aus $\rightarrow)$“$\ldots n\in\mathbb{N}$”
folgt via **159-14**: $2+n\in\mathbb{N}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow)$“$\ldots n\in\mathbb{N}$”
folgt via **239-5**: $n<1+n$.

`1.4:` Via **297-4** gilt: $-1+(2+n)=1+n$.

`1.5:` Via **258-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(R\restriction 2+n)=(2+n)\cap\mathsf{dom}\,R$.

`1.6:` Via **261-1** gilt: $(R\restriction 2+n)\subseteq R$.

`1.7:` Aus $\rightarrow)$“$\ldots n\in\mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $n\in\mathbb{R}$.

...

Beweis **307-5** . . .

`2.1:` Aus →) " R ist $1 + ., \phi$-rekursiv " und
aus `1.6` " $(R \downharpoonright 2+n) \subseteq R$ "
folgt via **302-4**: $(R \downharpoonright 2+n)$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv.

`2.2:` Aus `1.2` " $2+n \in \mathbb{N}$ "
folgt via **197-4**: $2+n \subseteq \mathbb{N}$.

`2.3:` Aus `1.3` " $n < 1+n$ " und
aus `1.4`
folgt: $n < -1 + (2+n)$.

`2,4:` Aus `1.5` und
aus →) " $\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$ "
folgt: $\mathsf{dom}\ (R \downharpoonright 2+n) = (2+n) \cap \mathbb{N}$.

`2.5:` Aus `1.7` " $n \in \mathbb{R}$ "
folgt via **307-1**: $n < 2+n$.

`3.1:` Aus `2.2` " $2+n \subseteq \mathbb{N}$ "
folgt via **2-10**: $(2+n) \cap \mathbb{N} = 2+n$.

`3.2:` Aus `1.1` " $0 < n \ldots$ " und
aus `2.3` " $n < -1 + (2+n)$ "
folgt: $0 < n < -1 + (2+n)$.

`3.3:` Aus →) " $\ldots n \in \mathbb{N}$ ",
aus `1.2` " $2+n \in \mathbb{N}$ " und
aus `2.5` " $n < 2+n$ "
folgt via **197-5**: $n \in 2+n$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `2.4`
folgt: $\mathsf{dom}\ (R \downharpoonright 2+n) = 2+n$.

`4.2:` Aus →) " $(n, q) \in R$ " und
aus `3.3` " $n \in 2+n$ "
folgt via **299-5**: $(n, q) \in (R \downharpoonright 2+n)$.

`5.1:` Aus `4.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\ (R \downharpoonright 2+n) \in \mathbb{N}$.

`5.2:` Aus `3.2` und
aus `4.1`
folgt: $0 < n < -1 + \mathsf{dom}\ (R \downharpoonright 2+n)$.

. . .

Beweis **307-5** . . .

`6:` Aus `2.1` "$(R \downharpoonleft 2+n)$ ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus `5.1` "$\mathsf{dom}\,(R \downharpoonleft 2+n) \in \mathbb{N}$",
aus `5.2` "$0 < n < -1 + \mathsf{dom}\,(R \downharpoonleft 2+n)$" und
aus `4.2` "$(n,q) \in (R \downharpoonleft 2+n)$"
folgt via **307-4**: $q \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi)$.

$\square$

307-6. Ein Zwischenschritt wird vorab beweisen.

307-6(Satz)

Aus "$1 < n \in \mathbb{N}$"
folgt "$-2+n, -1+n \in n$" *und* "$((1, -2+n), -1+n) \in \mathsf{A}$".

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **307-6** `VS` gleich $1 < n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`2.1:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{Z}$",
aus `1`"$n \in \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$1 < n \ldots$"
folgt via **166-3**: $0 \neq n-1 \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1`"$n \in \mathbb{Z}$" und
aus $<$**schola**"$0 < 1$"
folgt via **166-2**: $n-1 < n$.

`3.1:` Aus `2.1`"$0 \neq n-1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-1**: $-1+(n-1) \in \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots n-1 \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `2.2`"$n-1 < n$"
folgt via **197-5**: $n-1 \in n$.

`3.3:` Aus `2.1`"$\ldots n-1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n-1 \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2.1`"$\ldots n-1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $n-1$ Menge.

`4:` Aus `3.3`"$n-1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **196-3**: $-1+(n-1) < n-1$.

...

Beweis **307-6** `VS` gleich $1 < n \in \mathbb{N}$.

...

`5.1:` Via **FS−+** gilt: $n - 1 = -1 + n$.

`5.2:` Aus `4`“$-1 + (n - 1) < n - 1$” und
aus `2.2`“$n - 1 < n$”
folgt via **107-8**: $-1 + (n - 1) < n$.

`5.3:` $$-1 + (n - 1) \overset{\mathbf{FS-+}}{=} -1 + (-1 + n) \overset{\mathbf{FSA}}{=} (-1 + (-1)) + n \overset{\mathbf{+schola}}{=} -2 + n.$$

`6.1:` Aus `3.2` und
aus `5.1`
folgt: $\boxed{-1 + n \in n}$

`6.2:` Aus `3.1`“$-1 + (n - 1) \in \mathbb{N}$”,
aus `VS` gleich “$\ldots n \in \mathbb{N}$” und
aus `5.2`“$-1 + (n - 1) < n$”
folgt via **197-5**: $-1 + (n - 1) \in n$.

`7.1:` Aus `5.3`“$-1 + (n - 1) = \ldots = -2 + n$” und
aus `6.2`
folgt: $\boxed{-2 + n \in n}$

`7.2:` Aus `6.1`
folgt via **ElementAxiom**: $-1 + n$ Menge.

`8:` $$1 + (-2 + n) \overset{\mathbf{FSA}}{=} (1 + (-2)) + n \overset{\mathbf{+scola}}{=} -1 + n.$$

`9:` Aus `8`“$1 + (-2 + n) = \ldots = -1 + n$” und
aus `7.2`
folgt: $1 + (-2 + n)$ Menge.

`10:` Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus `9`“$1 + (-2 + n)$ Menge”
folgt via **307-3**: $((1, -2 + n), 1 + (-2 + n)) \in \mathsf{A}$.

`11:` Aus `8`“$1 + (-2 + n) = \ldots = -1 + n$”
folgt via **PaarAxiom I**:
$$((1, -2 + n), 1 + (-2 + n)) = ((1, -2 + n), -1 + n).$$

...

Beweis **307-6** `VS` gleich $1 < n \in \mathbb{N}$.

...

`12:` Aus `10` und
aus `11`

folgt: $\boxed{((1, -2+n), -1+n) \in \mathsf{A}}$

$\square$

307-7. Der in **307-4** ausgesparte Fall $n = -1 + \mathsf{dom}\, R$ wird hier für $1 < \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$ nachgeholt.

<u>**307-7(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R ist $1 + ., \phi$-rekursiv.*

$\rightarrow\!)$ $1 < \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow\!)$ $(-1 + \mathsf{dom}\, R, q) \in R$.

Dann folgt "$q \in \mathsf{ran}\, \phi$".

<u>Beweis **307-7**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$1 < \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-6**: $$(-2 + \mathsf{dom}\, R, -1 + \mathsf{dom}\, R \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (((1, -2 + \mathsf{dom}\, R), -1 + \mathsf{dom}\, R) \in \mathsf{A}).$$

2: Aus 1 "$-2 + \mathsf{dom}\, R \ldots \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **7-7**: $$\exists \Omega : (-2 + \mathsf{dom}\, R, \Omega) \in R.$$

3: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist $1 + ., \phi$-rekursiv",
aus 2 "$\ldots (-2 + \mathsf{dom}\, R, \Omega) \in R$",
aus $\rightarrow\!)$ "$(-1 + \mathsf{dom}\, R, q) \in R$" und
aus 1 "$((1, -2 + \mathsf{dom}\, R), -1 + \mathsf{dom}\, R) \in \mathsf{A}$"
folgt via **306-2**: $$q \in \mathsf{ran}\, \phi.$$

□

307-8. Interessanter Weise gilt $\{p\} \times \{q\} = \{(p,q)\}$ unabhängig davon, ob p, q Mengen sind oder nicht.

307-8(Satz)

a) $\{p\} \times \{q\} = \{(p,q)\}$.

b) *Aus "$p \in x$" und "$q \in y$" folgt "$\{(p,q)\} \subseteq x \times y$".*

c) *Aus "$p \in x$" und "$q \in y$" folgt "$\{p\} \times \{q\} \subseteq x \times y$".*

<u>Beweis **307-8**</u> `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \{p\} \times \{q\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \{p\} \times \{q\}$”
folgt via **6-5**:
$$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in \{p\}) \wedge (\Phi \in \{q\}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi)).$$

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$”
folgt via **1-6**: $(\Omega = p) \wedge (p \text{ Menge})$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Phi \in \{q\} \ldots$”
folgt via **1-6** $(\Phi = q) \wedge (q \text{ Menge})$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\Omega = p \ldots$” und
aus `3.2`“$\Phi = q \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, q)$.

`4.2:` Aus `3.1`“$\ldots p$ Menge” und
aus `3.2`“$\ldots q$ Menge”
folgt via **259-36**: $(p, q) \in \{(p, q)\}$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(\Omega, \Phi) \in \{(p, q)\}$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \{(p, q)\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\} \times \{q\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(p, q)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\{p\} \times \{q\} \subseteq \{(p, q)\}$”

...

<u>Beweis</u> **<u>307-8</u>** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{(p,q)\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \{(p,q)\}$”
folgt via **1-6**: $(\alpha = (p,q)) \wedge ((p,q)$ Menge$)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (p,q)$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: p, q Menge.

`4.1:` Aus `3`“$p\ldots$ Menge”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots q$ Menge”
folgt via **1-3**: $q \in \{q\}$.

`5:` Aus `4.1`“$p \in \{p\}$” und
aus `4.2`“$q \in \{q\}$”
folgt via **6-6**: $(p,q) \in \{p\} \times \{q\}$.

`6:` Aus `2`“$\alpha = (p,q)\ldots$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \{p\} \times \{q\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(p,q)\}) \Rightarrow (\alpha \in \{p\} \times \{q\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\{(p,q)\} \subseteq \{p\} \times \{q\}$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$\{p\} \times \{q\} \subseteq \{(p,q)\}$” und
aus `A2` gleich “$\{(p,q)\} \subseteq \{p\} \times \{q\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{p\} \times \{q\} = \{(p,q)\}$.

Beweis **307-8** `bc)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge (q \in y)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p \in x) \wedge (q \in y)$”
folgt via **6-6**: $(p, q) \in x \times y$.

`2.b):` Aus `1` “$(p, q) \in x \times y$”
folgt via **1-8**: $\{(p, q)\} \subseteq x \times y$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{p\} \times \{q\} = \{(p, q)\}$.

`4.c):` Aus `3` und
aus `2.b)`
folgt: $\{p\} \times \{q\} \subseteq \{(p, q)\}$.

□

307-9. Für keine natürliche Zahl n gilt $1+n\in n$.

307-9(Satz)

a) *Aus "$n\in\mathbb{N}$" folgt "$1+n\notin n$".*

b) *Aus "$n\in\mathbb{N}$" und "q Menge" folgt "$\{(n,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (n,q)".*

Beweis **307-9**

RECH.$\leq$-**Notation**.

---

a) VS gleich $n\in\mathbb{N}$.

1: Es gilt: $(1+n\in n)\vee(1+n\notin n)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $1+n\in n$.

2: Aus VS gleich "$n\in\mathbb{N}$" folgt via **159-10**: $1+n\in\mathbb{N}$.

3: Aus 2"$1+n\in\mathbb{N}$", aus VS gleich "$n\in\mathbb{N}$" und aus 1.1.Fall"$1+n\in n$" folgt via **197-5**: $1+n\subseteq n$.

4: Aus VS gleich "$n\in\mathbb{N}$" folgt via **239-5**: $n\in 1+n$.

5: Aus 4"$n\in 1+n$" und aus 3"$1+n\subseteq n$" folgt via **0-4**: $n\in n$.

6: Aus VS gleich "$n\in\mathbb{N}$" folgt via **197-4**: $n\notin n$.

7: Es gilt 5"$n\in n$". Es gilt 6"$n\notin n$". Ex falso quodlibet folgt: $1+n\notin n$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $1+n\notin n$.

<u>Beweis **307-9**</u> `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $n < 1 + n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

`2:` Aus `1`"$n < 1 + n$"
folgt via **41-3**: $n \neq 1 + n$.

`3:` Aus `AAII`"A Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus `2`"$n \neq 1 + n$"
folgt via **306-12**: $((1, n), n) \notin \mathsf{A}$.

`4:` Aus `1.2`"n Menge",
aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge" und
aus `3`"$((1, n), n) \notin \mathsf{A}$"
folgt via **302-4**: $\{(n, q)\}$ ist $1 + .$, ϕ-rekursiv mit Startwert (n, q).

$\square$

307-10. Nun wird eine interessante Folgerung von **306-14** für $1+.,\phi$-rekursive Funktionen mit (wie durch die Voraussetzungen implizit festgelegt: nicht-leerem) Definitions-Bereich in $\mathbb{N}$ bewiesen.

307-10(Satz) *Es gelte:*

→) f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

→) f,ϕ *Funktion.*

→) $n = \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

→) $f(-1+n) \in \mathsf{dom}\,\phi$.

Dann folgt:

a) $\{(n,\phi(f(-1+n)))\}\cup f$ *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

b) $\{(n,\phi(f(-1+n)))\}\cup f$ *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,(\{(n,\phi(f(-1+n)))\}\cup f) = 1+n$.

d) $f \subset \{(n,\phi(f(-1+n)))\}\cup f$.

RECH-**Notation**.

Beweis **307-10**

1: Aus →) “ $f(-1+n)\in\mathsf{dom}\,\phi$ ”
folgt via **17-5**: $\phi(f(-1+n))$ Menge.

2: Aus →) “ $n\ldots\in\mathbb{N}$ ” und
aus 1 “ $\phi(f(-1+n))$ Menge ”
folgt via **307-9**:
$\{(n,\phi(f(-1+n)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (n,q).

3: Aus 2 “ $\{(n,\phi(f(-1+n)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (n,q) ”
folgt via **302-1(Def)**: $\{(n,\phi(f(-1+n)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

4.1: Aus →) “ $n\ldots\in\mathbb{N}$ ”
folgt via **197-4**: $n\notin n$.

4.2: Aus →) “ $n\ldots\in\mathbb{N}$ ”
folgt via **307-9**: $1+n\notin n$.

...

Beweis **307-10** ...

5.1: Aus 4.1 und
aus →) "... $n = \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $n \notin \mathsf{dom}\, f$.

5.2: Aus 4.2 und
aus →) "... $n = \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $1 + n \notin \mathsf{dom}\, f$.

Thema5.3 $(\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (n = 1 + \alpha)$.

6.1: Aus Thema5.3 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$ ..." und
aus →) "... $\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

6.2: Aus Thema5.3
folgt: $n = 1 + \alpha$.

7: Aus 6.1 "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: α Zahl.

8: Aus 7 "α Zahl"
folgt via **FSA0**: $0 + \alpha = \alpha$.

9: $-1 + n \stackrel{6}{=} -1 + (1 + \alpha) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1 + 1) + \alpha \stackrel{+\textbf{scola}}{=} 0 + \alpha \stackrel{8}{=} \alpha$.

10: Aus 9 "$-1 + n = \ldots = \alpha$"
folgt: $\phi(f(-1 + n)) = \phi(f(\alpha))$.

Ergo Thema5.3:

A1	"$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (n = 1 + \alpha)) \Rightarrow (\phi(f(-1 + n)) = \phi(f(\alpha)))$"

6: Aus 3 "$\{(n, \phi(f(-1 + n)))\}$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv",
aus →) "f ist $1 + .,\phi$-rekursiv",
aus →) "f, ϕ Funktion",
aus AAII "A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus 5.1 "$n \notin \mathsf{dom}\, f$",
aus 5.2 "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, f$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (n = 1 + \alpha))$
$\Rightarrow (\phi(f(-1 + n)) = \phi(f(\alpha)))$"
folgt via **306-14**:

$$\{(n, \phi(f(-1 + n)))\} \cup f \text{ ist } 1 + .,\phi\text{-rekursiv}$$
$$\wedge(\{(n, \phi(f(-1 + n)))\} \cup f \text{ Funktion}).$$

...

<u>Beweis</u> **307-10** ...

7.a): Aus 6
folgt: $\{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

7.b): Aus 6
folgt: $\{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$ Funktion.

8: Aus →) "$n \ldots \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

9: Aus 8"n Menge" und
aus 1"$\phi(f(-1+n))$ Menge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f) = \{n\} \cup \mathsf{dom}\, f$.

10: Aus 9 und
aus →) "$n = \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f) = \{n\} \cup n$.

11: Aus →) "$n \ldots \in \mathbb{N}$"
folgt via $\mathsf{A}\mathbb{N}$**Axiom**: $\{n\} \cup n = 1+n$.

12.c): Aus 10 und
aus 11
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f) = 1+n$.

13: Via **2-7** gilt: $f \subseteq \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$.

...

<u>Beweis **307-10**</u> ...

14: Es gilt: $(f = \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f)$
$\vee (f \neq \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f)$.

`wfFallunterscheidung`

`14.1.Fall` $f = \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$.

15: Aus `14.1.Fall`
folgt: $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, (\{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f)$.

16: Aus `15` und
aus `12.c)`
folgt: $\mathsf{dom}\, f = 1 + n$.

17: Aus `16` und
aus →) "$n = \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt: $n = 1 + n$.

18: Aus →) "$n \ldots \in \mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $n < 1 + n$.

19: Aus `18` "$n < 1 + n$"
folgt via **41-3**: $n \neq 1 + n$.

20: Es gilt `19` "$n \neq 1 + n$".
Es gilt `17` "$n = 1 + n$".
Ex falso qudolibet folgt: $f \neq \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2`	"$f \neq \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$"

15.d): Aus `13` "$f \subseteq \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$" und
aus `A2` gleich "$f \neq \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$"
folgt via **57-1(Def)**: $f \subset \{(n, \phi(f(-1+n)))\} \cup f$.

□

307-11. Gilt $\phi : A \to A$ und $q \in A$, so gibt es mit $[q, \phi(q)]$ eine $1 + ., \phi$-rekursive Funktion mit Startwert $(0, q)$ und Definitions-Bereich= 2. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - d) - a) - e) - f)`

<u>**307-11(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) $q \in A$.

→) $\phi : A \to A$.

Dann folgt:

a) $[q, \phi(q)]$ *ist* $1 + ., \phi$*-rekursiv mit Startwert* $(0, q)$.

b) $[q, \phi(q)]$ *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) = 2$.

d) $\mathsf{ran}\,([q, \phi(q)]) = \{q, \phi(q)\}$.

e) $[q, \phi(q)] : 2 \to A$.

f) $[q, \phi(q)] \subseteq \mathbb{N} \times A$.

<u>Beweis **307-11**</u>

`1.1:` Aus →) "$q \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Aus →) "$\phi : A \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\phi = A)$.

`1.3:` Via **259-36** gilt: $\{(0, q)\}$ Funktion.

`2.1:` Aus `1.1` "q Menge"
folgt via **305-10**: $\{(0, q)\}$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`2.2:` Aus →) "$q \in A$" und
aus `1.2` "... $\mathsf{dom}\,\phi \in A$"
folgt: $q \in \mathsf{dom}\,\phi$.

...

<u>Beweis **307-11**</u> ...

3.1: Aus 2.1“$\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$”
folgt via **302-1(Def)**: $(\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$)$
$\wedge((0,q)\in\{(0,q)\})$.

3.2: Aus 2.2“$q\in\mathsf{dom}\,\phi$”
folgt via **17-5**: $\phi(q)$ Menge.

4.1: Aus $\in$**schola**“$1\in\mathbb{N}$” und
aus 3.2“$\phi(q)$ Menge”
folgt via **307-9**: $\{(1,\phi(q))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(1,\phi(q))$.

4.2: Aus 1.1“q Menge” und
aus 3.2“$\phi(q)$ Menge”
folgt: $[q,\phi(q)]=[q]\cup\{(\mathsf{dom}\,[q],\phi(q))\}$.

4.b): Aus 1.1“q Menge” und
aus 3.2“$\phi(q)$ Menge”
folgt: $[q,\phi(q)]$ Funktion.

4.c): Aus 1.1“q Menge” und
aus 3.2“$\phi(q)$ Menge”
folgt: $\mathsf{dom}\,([q,\phi(q)])=2$.

4.d): Aus 1.1“q Menge” und
aus 3.2“$\phi(q)$ Menge”
folgt: $\mathsf{ran}\,([q,\phi(q)])=\{q,\phi(q)\}$.

5.1: Aus 4.1“$\{(1,\phi(q))\}$ ist $1+.,$ -rekursivmit Startwert $(1,\phi(q))$”
folgt via **302-1(Def)**: $\{(1,\phi(q))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

5.2: Aus 1.1“q Menge”
folgt: $[q]=\{(0,q)\}$.

6: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” und
aus 1.1“q Menge”
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})=\{0\}$.

...

Beweis **307-11** ...

`7.1:` Aus $\neq$**schola**"$0 \neq 1$"
folgt via **1-7**: $1 \notin \{0\}$.

`7.2:` Aus $+$**schola**"$1 + 1 = 2$" und
aus $\neq$**schola**"$2 \neq 0$"
folgt: $1 + 1 \neq 0$.

`7.3:` Aus `6` und
aus `5.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,[q] = \{0\}$.

`8.1:` Aus `7.1` und
aus `6`
folgt: $1 \notin \mathsf{dom}\,(\{(0, q)\})$.

`8.2:` Aus `7.2`"$1 + 1 \neq 0$"
folgt via **1-7**: $1 + 1 \notin \{0\}$.

`8.3:` Aus `7.3` und
aus **95-1(Def)**
folgt: $\mathsf{dom}\,[q] = 1$.

`9.1:` Aus `8.2` und
aus `6`
folgt: $1 + 1 \notin \mathsf{dom}\,(\{(0, q)\})$.

`9.2:` Aus `8.3`"$\mathsf{dom}\,[q] = 1$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\mathsf{dom}\,[q], \phi(q)) = (1, \phi(q))$.

...

Beweis **307-11** ...

`Thema10` $(\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})) \wedge (1 = 1 + \alpha)$.

`11:` Aus `Thema10` und
aus `6`
folgt: $\alpha \in \{0\}$.

`12:` Aus `11`“$\alpha \in \{0\}$”
folgt via **1-6**: $\alpha = 0$.

`13:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” und
aus `1.1`“q Menge”
folgt via **259-37**: $\{(0,q)\}(0) = q$.

`14:` Aus `13` und
aus `12`
folgt: $q = \{(0,q)\}(\alpha)$.

`15:` Aus `14`
folgt: $\phi(q) = \phi(\{(0,q)\}(\alpha))$.

Ergo `Thema10`:

`A1` “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})) \wedge (1 = 1 + \alpha)) \Rightarrow (\phi(q) = \phi(\{(0,q)\}(\alpha)))$”

`11.1:` Aus `5.1`“$\{(1,\phi(q))\}$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv”,
aus `3.1`“$\{(0,q)\}$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv... ”,
aus `1.3`“$\{(0,q)\}$ Funktion”,
aus `1.2`“ϕ Funktion... ”,
aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$”,
aus `8.1`“$1 \notin \mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})$”,
aus `9.1`“$1 + 1 \notin \mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})) \wedge (1 = 1 + \alpha)) \Rightarrow (\phi(q) = \phi(\{(0,q)\}(\alpha)))$”
folgt via **306-14**: $\{(1,\phi(q))\} \cup \{(0,q)\}$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv.

`11.2:` Aus `4.2` und
aus `9.2`
folgt: $[q,\phi(q)] = [q] \cup \{(1,\phi(q))\}$.

...

Beweis **307-11** ...

`12:` Aus `11.2` und
aus `5.2`
folgt: $[q, \phi(q)] = \{(0, q)\} \cup \{(1, \phi(q))\}$.

`13.1:` Aus `12`
folgt via **KG**$\cup$: $[q, \phi(q)] = \{(1, \phi(q))\} \cup \{(0, q)\}$.

`13.2:` Aus `3.1`"$\ldots (0, q) \in \{(0, q)\}$"
folgt via **2-2**: $(0, q) \in \{(1, \phi(q))\} \cup \{(0, q)\}$.

`14.1:` Aus `11.1` und
aus `13.1`
folgt: $[q, \phi(q)]$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv.

`14.2:` Aus `13.1` und
aus `13.2`
folgt: $(0, q) \in [q, \phi(q)]$.

`15.a):` Aus `14.1`"$[q, \phi(q)]$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv" und
aus `14.2`"$(0, q) \in [q, \phi(q)]$"
folgt via **302-1(Def)**: $[q, \phi(q)]$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

...

<u>Beweis **307-11**</u> ...

`Thema15.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,([q, \phi(q)])$.

`16`: Aus `Thema15.1` und
aus `4.d)`
folgt: $\alpha \in \{q, \phi(q)\}$.

`17`: Aus `16` "$\alpha \in \{q, \phi(q)\}$"
folgt via **94-4**: $(\alpha = q) \vee (\alpha = \phi(q))$.

`Fallunterscheidung`

`17.1.Fall` $\alpha = q$.

Aus `17.1.Fall` und
aus →) "$q \in A$"
folgt: $\alpha \in A$.

`17.2.Fall` $\alpha = \phi(q)$.

`18`: Aus →) "$\phi : A \to A$" und
aus →) "$q \in A$"
folgt via **21-4**: $\phi(q) \in A$.

`19`: Aus `17.2.Fall` und
aus `18`
folgt: $\alpha \in A$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in A$.

Ergo `Thema15.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,([q, \phi(q)])) \Rightarrow (\alpha \in A)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\mathsf{ran}\,([q, \phi(q)]) \subseteq A$"

`15.e)`: Aus `4.b)` "$[q, \phi(q)]$ Funktion",
aus `4.c)` "$\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) = 2$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{ran}\,([q, \phi(q)]) \subseteq A$"
folgt via **21-1(Def)**: $[q, \phi(q)] : 2 \to A$.

`16`: Aus `15.e)` "$[q, \phi(q)] : 2 \to A$"
folgt via **259-28**: $[q, \phi(q)] \subseteq 2 \times A$.

...

<u>Beweis</u> **<u>307-11</u>** ...

`17:` Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $2 \subseteq \mathbb{N}$.

`18:` Aus `17`"$2 \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **6-7**: $2 \times A \subseteq \mathbb{N} \times A$.

`19.f):` Aus `16`"$[q, \phi(q)] \subseteq 2 \times A$" und
aus `18`"$2 \times A \subseteq \mathbb{N} \times A$"
folgt via **0-6**: $[q, \phi(q)] \subseteq \mathbb{N} \times A$.

$\square$

307-12(AC). Nach vielerley Vorbereitungen soll nun, eventuelle Verallgemeinerungen außer Acht lassend, der die Untersuchungen leitende Satz bewiesen werden.

307-12(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $q \in A$ *Menge.*

$\rightarrow\!)$ $\phi : A \to A$.

Dann gibt es Ω, *so dass gilt:*

`e1)` Ω *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv mit Startwert* $(0, q)$.

`e2)` $\Omega : \mathbb{N} \to A$.

`e3)` $\Omega(0) = q$.

`e4)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) = \phi(\Omega(\alpha)))$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **307-12(AC)**

$\leq$-Notation.

`1.1:` Aus →) "$q \in A \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`1.2:` Aus **159-9** "$\mathbb{N}$ Menge" und
aus →) "$\ldots A$ Menge"
folgt via **binär-cartesisches Axiom**: $\mathbb{N} \times A$ Menge.

`1.3:` Aus ∈**schola** "$0 \in \mathbb{N}$" und
aus →) "$q \in A \ldots$"
folgt via **307-8**: $\{(p, q)\} \subseteq \mathbb{N} \times A$.

`1.4:` Aus →) "$q \in A \ldots$" und
aus →) "$\phi : A \to A$"
folgt via **307-11**: $[q, \phi(q)]$ ist $1 + .$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`1.5:` Aus →) "$q \in A \ldots$" und
aus →) "$\phi : A \to A$"
folgt via **307-11**:
$$([q, \phi(q)] \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) = 2) \wedge ([q, \phi(q)] \subseteq \mathbb{N} \times A).$$

`1.6:` Aus →) "$\phi : A \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\phi = A) \wedge (\mathsf{ran}\,\phi \subseteq A)$.

...

Beweis **307-12(AC)** ...

2.1: Aus 1.1"q Menge"
folgt via **305-10**: $\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

2.2: Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus 1.1"q Menge"
folgt via **239-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\}) = \{0\}$.

2.3: Via **259-36** gilt: $\{(0,q)\}$ Funktion.

2.4: Aus 1.4"$[q,\phi(q)]$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"
folgt via **302-1(Def)**: $[q,\phi(q)]$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

2.5: Aus 1.5"$\ldots\mathsf{dom}\,([q,\phi(q)]) = 2\ldots$" und
aus $\in$**schola**"$2\in\mathbb{N}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,([q,\phi(q)])\in\mathbb{N}$.

3: Aus **95-1(Def)**"$1=\{0\}$" und
aus $\in$**schola**"$1\in\mathbb{N}$"
folgt: $\{0\}\in\mathbb{N}$.

4: Aus 2.2 und
aus 3
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})\in\mathbb{N}$.

5: Aus 2.1"$\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$",
aus 2.3"$\{(0,q)\}$ Funktion",
aus 4"$\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\})\in\mathbb{N}$",
aus 1.3"$\{(p,q)\}\subseteq\mathbb{N}\times A$" und
aus 1.2"$\mathbb{N}\times A$ Menge"
folgt via **305-26(AC)**:
$\exists\Omega : (\Omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q))\wedge(\Omega$ Funktion$)\wedge((\mathsf{dom}\,\Omega\in\mathbb{N})\vee(\mathsf{dom}\,\Omega=\mathbb{N}))\wedge(\{(0,q)\}\subseteq\Omega\subseteq\mathbb{N}\times A)\wedge(\forall\alpha : ((\alpha$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$)\wedge(\alpha$ Funktion$)\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha\in\mathbb{N})\vee(\mathsf{dom}\,\alpha=\mathbb{N}))\wedge(\Omega\subseteq\alpha\subseteq\mathbb{N}\times A))\Rightarrow(\alpha=\Omega))$.

6: Aus 5"$\ldots\Omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)\ldots$",
aus 1.4"$[q,\phi(q)]$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$",
aus 5"$\ldots\Omega$ Funktion$\ldots$",
aus 1.5"$[q,\phi(q)]$ Funktion$\ldots$",
aus 1.6"ϕ Funktion$\ldots$",
aus 5"$\ldots(\mathsf{dom}\,\Omega\in\mathbb{N})\vee(\mathsf{dom}\,\Omega=\mathbb{N})\ldots$" und
aus 2.5"$\mathsf{dom}\,([q,\phi(q)])\in\mathbb{N}$"
folgt via **305-8**: $(\Omega\subseteq[q,\phi(q)])\vee([q,\phi(q)]\subseteq\Omega)$.

...

Beweis **307-12(AC)** ...

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $\Omega \subseteq [q, \phi(q)]$.

7: Aus `2.4`"$[q, \phi(q)]$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv",
aus `1.5`"$[q, \phi(q)]$ Funktion..." ,
aus `2.5`"$\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) \in \mathbb{N}$" ,
aus `6.1.Fall`"$\Omega \subseteq [q, \phi(q)]$" ,
aus `1.5`"$\ldots [q, \phi(q)] \subseteq \mathbb{N} \times A$" und
aus `5`"$\ldots \forall \alpha : ((\alpha$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv$) \wedge (\alpha$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})) \wedge (\Omega \subseteq \alpha \subseteq \mathbb{N} \times A)) \Rightarrow (\alpha = \Omega)$"
folgt: $[q, \phi(q)] = \Omega$.

8: Aus `7`
folgt: $\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) = \mathsf{dom}\,\Omega$.

9: Aus `8`
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) \subseteq \mathsf{dom}\,\Omega$.

10: Aus `9` und
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) = 2 \ldots$"
folgt: $2 \subseteq \mathsf{dom}\,\Omega$.

`6.2.Fall` $[q, \phi(q)] \subseteq \Omega$.

7: Aus `6.2.Fall`"$[q, \phi(q)] \subseteq \Omega$"
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) \subseteq \mathsf{dom}\,\Omega$.

8: Aus `7` und
aus `1.5`"$\ldots \mathsf{dom}\,([q, \phi(q)]) = 2 \ldots$"
folgt: $2 \subseteq \mathsf{dom}\,\Omega$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$2 \subseteq \mathsf{dom}\,\Omega$"

...

Beweis **307-12(AC)** ...

7: Aus 5
folgt: $(\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$.

8: Aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{N}$”,
aus `7.1.Fall`“$\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$” und
aus `A1` gleich “$2 \subseteq \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via **197-6**: $2 \leq \mathsf{dom}\,\Omega$.

9.1: Aus $<$**schola**“$1 < 2$” und
aus 8“$2 \leq \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via **107-8**: $1 < \mathsf{dom}\,\Omega$.

9.2: Aus $<$**schola**“$0 < 2$” und
aus 8“$2 \leq \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via **107-8**: $0 < \mathsf{dom}\,\Omega$.

10: Aus 9.2“$0 < \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via **41-3**: $0 \neq \mathsf{dom}\,\Omega$.

11: Aus 10“$0 \neq \mathsf{dom}\,\Omega$” und
aus `7.1.Fall`“$\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$”
folgt via **307-2**: $-1 + \mathsf{dom}\,\Omega \in \mathsf{dom}\,\Omega$.

12: Aus 5“...Ω Funktion...” und
aus 11“$-1 + \mathsf{dom}\,\Omega \in \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via **18-22**: $(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega, \Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)) \in \Omega$.

13: Aus 5“...Ω ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$...”
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $1 + ., \phi$-rekursiv.

14: Aus 13“Ω ist $1 + ., \phi$-rekursiv”,
aus 9.1“$1 < \mathsf{dom}\,\Omega$”,
aus `7.1.Fall`“$\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$” und
aus 12“$(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega, \Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)) \in \Omega$”
folgt via **307-7**: $\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in \mathsf{ran}\,\phi$.

15: Aus 14“$\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in \mathsf{ran}\,\phi$” und
aus 1.6“...$\mathsf{ran}\,\phi \subseteq A$”
folgt via **0-4**: $\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in A$.

16: Aus 15“$\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in A$” und
aus 1.6“...$\mathsf{dom}\,\phi = A$...”
folgt: $\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in \mathsf{dom}\,\phi$.

...

...

Beweis **307-12(AC)** ...

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$.

...

`17:` Aus `13`"Ω ist $1 + .,\phi$-rekursiv",
aus `5`"...Ω Funktion..." ,
aus `1.6`"ϕ Funktion..." ,
aus "$\mathsf{dom}\,\Omega = \mathsf{dom}\,\Omega$" ,
aus `7.1.Fall`"$\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `16`"$\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **307-10**:

$$(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv})$$
$$\wedge(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega \text{ Funktion})$$
$$\wedge(\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega) = 1 + \mathsf{dom}\,\Omega)$$
$$\wedge(\Omega \subset \{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega).$$

`18.1:` Aus `7.1.Fall`"$\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + \mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$.

`18.2:` Via **261-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega)$
$\subseteq \{\phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega))\} \cup \mathsf{ran}\,\Omega$.

`18.3:` Aus `17`"...$\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$ Funktion..."
folgt via **18-18(Def)**: $\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$ Relation.

`18.4:` Via **2-7** gilt: $\Omega \subseteq \{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$.

`19.1:` Aus `18.1`"$1 + \mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $1 + \mathsf{dom}\,\Omega \subseteq \mathbb{N}$.

`19.2:` Aus →)"$\phi : A \to \mathbb{A}$" und
aus `15`"$\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega) \in A$"
folgt via **21-4**: $\phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)) \in A$.

`19.3:` Aus `5`"...$\Omega \subseteq \mathbb{N} \times A$..."
folgt via **7-10**: $\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathbb{N} \times A)$.

`19.4:` Aus `18.3`"$\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$ Relation"
folgt via **10-4**: $\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$
$\subseteq \mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega)$
$\times \mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega)$.

`19.5:` Aus `17`"...$\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega)$
$= 1 + \mathsf{dom}\,\Omega$..." und
aus `18.1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1 + \mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega) \in \mathbb{N}$.

...

...

Beweis **307-12(AC)** ...

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$.

...

`20.1:` Aus 17 "... $\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) = 1+\Omega$ ..." und aus `19.1` "$1+\mathsf{dom}\,\Omega \subseteq \mathbb{N}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) \subseteq \mathbb{N}$.

`20.2:` Via **7-22** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathbb{N}\times A) \subseteq A$.

`21:` Aus `19.3` "$\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathbb{N}\times A)$" und
aus `20.2` "$\mathsf{ran}\,(\mathbb{N}\times A) \subseteq A$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq A$.

`22:` Aus `19.2` "$\phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)) \in A$" und
aus `21` "$\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq A$"
folgt via **297-7**: $\{\phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega))\}\cup\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq A$.

`23:` Aus `18.2` "$\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega)$
$\subseteq \{\phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega))\}\cup\mathsf{ran}\,\Omega$" und
aus `22` "$\{\phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega))\}\cup\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq A$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) \subseteq A$.

`24:` Aus `20.1` "$\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `23` "$\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) \subseteq A$"
folgt via **6-7**: $\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega)$
$\times\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega)$
$\subseteq \mathbb{N}\times A$.

`25:` Aus `19.4` "$\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega$
$\subseteq \mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega)$
$\times\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega)$" und
aus `24` "$\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega)$
$\times\mathsf{ran}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) \subseteq \mathbb{N}\times A$"
folgt via **0-6**: $\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega \subseteq \mathbb{N}\times A$.

`26:` Aus 17 "$\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega$ ist $1+.,\phi$-rekursiv... ",
aus 17 "... $\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega$ Funktion... ",
aus `19.5` "$\mathsf{dom}\,(\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega) \in \mathbb{N}$",
aus `18.4` "$\Omega \subseteq \{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega$",
aus `25` "$\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega \subseteq \mathbb{N}\times A$" und
aus 5 "... $\forall\alpha : ((\alpha$ ist $1+.,\phi$-rekursiv$) \wedge (\alpha$ Funktion$)$
$\wedge((\mathsf{dom}\,\alpha\in\mathbb{N})\vee(\mathsf{dom}\,\alpha=\mathbb{N}))\wedge(\Omega\subseteq\alpha\subseteq\mathbb{N}\times A))\Rightarrow(\alpha=\Omega)$"
folgt: $\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\}\cup\Omega = \Omega$.

...

...

Beweis **307-12(AC)** ...

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $\mathsf{dom}\,\Omega \in \mathbb{N}$.

...

27: Aus 17 "$\ldots\Omega \subset \{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$"
folgt via **57-1(Def)**: $\Omega \neq \{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$.

28: Es gilt 26 "$\{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega = \Omega$".
Es gilt 27 "$\Omega \neq \{(\mathsf{dom}\,\Omega, \phi(\Omega(-1+\mathsf{dom}\,\Omega)))\} \cup \Omega$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$

`7.2.Fall` $\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: A2 "$\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$"

...

Beweis **307-12(AC)** ...

`Thema7.2` $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Omega.$

8: Aus `Thema7.2`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Omega$"
folgt via **7-7**: $\exists \Phi : (\Phi \in \mathsf{dom}\,\Omega) \wedge ((\Phi, \alpha) \in \Omega).$

9: Aus 8"... $\Phi \in \mathsf{dom}\,\Omega$ ..." und
aus `A2`
folgt: $\Phi \in \mathbb{N}.$

10: Es gilt: $(\Phi = 0) \vee (0 \neq \Phi).$
`Fallunterscheidung`

`10.1.Fall` $\Phi = 0.$

11: Aus `10.1.Fall`"$\Phi = 0$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \alpha) = (0, \alpha).$

12.1: Aus 11 und
aus 8"... $(\Phi, \alpha) \in \Omega$"
folgt: $(0, \alpha) \in \Omega.$

12.2: Aus 5"... Ω ist $1+., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ..."
folgt via **302-1(Def)**: $(0, q) \in \Omega.$

13: Aus 5"... Ω Funktion... ",
aus 12.1"$(0, \alpha) \in \Omega$" und
aus 12.2"$(0, q) \in \Omega$"
folgt via **18-18(Def)**: $\alpha = q.$

14: Aus 13 und
aus $\rightarrow$)"$q \in A$... "
folgt: $\alpha \in A.$

...

...

Beweis **307-12(AC)** ...

`Thema7.2` $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Omega.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`10.2.Fall` $0 \neq \Phi.$

`11:` Aus `5`"... Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$..."
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv.

`12:` Aus `11`"Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$",
aus `10.2.Fall`"$0 \neq \Phi$",
aus `9`"$\Phi \in \mathbb{N}$" und
aus `8`"...$(\Phi,\alpha) \in \Omega$"
folgt via **307-5**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi).$

`13:` Aus `12`"$\alpha \in (\mathsf{dom}\,\phi) \cap (\mathsf{ran}\,\phi)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\phi.$

`14:` Aus `13`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,\phi$" und
aus `1.6`"...$\mathsf{dom}\,\phi = A$..."
folgt: $\alpha \in A.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in A.$

Ergo `Thema7.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,\Omega) \Rightarrow (\alpha \in A).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` "$\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq A$"

`7.3:` Aus `5`"...Ω Funktion...",
aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$" und
aus `A3` gleich "$\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\Omega : \mathbb{N} \to A.$

`7.4:` Aus `5`"...Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$..."
folgt via **302-1(Def)**: $(0,q) \in \Omega.$

...

Beweis **307-12(AC)** ...

8: Aus 5"... Ω Funktion... " und
aus 7.4"$(0, q) \in \Omega$"
folgt via **18-20**: $q = \Omega(0)$.

9: Aus 9
folgt: $\Omega(0) = q$.

Thema10.1 $\alpha \in \mathbb{N}$.

11.1: Aus Thema10.1"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

11.2: Aus Thema10.1 und
aus A2
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$.

11.3: Aus 5"... Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ..."
folgt via **302-1(Def)**: Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv.

12: Aus 11.1 und
aus A2
folgt: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$.

13: Aus 5"... Ω Funktion... ",
aus 1.6"ϕ Funktion... ",
aus 11.3"Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus 11.2"$\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$" und
aus 12"$1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$"
folgt via **304-8**: $\Omega(1 + \alpha) = \phi(\Omega(\alpha))$.

Ergo Thema10.1: A4 "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) = \phi(\Omega(\alpha)))$"

10.2: Aus 5"$\exists \Omega$ ...",
aus 5"... Ω ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ...",
aus 7.3"$\Omega : \mathbb{N} \to A$",
aus 9"$\Omega(0) = q$" und
aus A4 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) = \phi(\Omega(\alpha)))$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv mit Startwert } (0, q))$
$\wedge(\Omega : \mathbb{N} \to A) \wedge (\Omega(0) = q)$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) = \phi(\Omega(\alpha))))$.

□

307-13. Nun wird die Kompetenz im Umgang mit $\leq$ ein wenig erweitert.

307-13(Satz)

a) *Aus* "$x_{-}M_{-}y$" *und* "$y_{-}M_{-}z$"
folgt "$x = y$" *oder* "$(x_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}y) \wedge (y_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}z)$" *oder* "$y = z$".

b) "$x \leq y \leq z$" *folgt* "$x = y$" *oder* "$x < y < z$" *oder* "$y = z$".

$\leq$-Notation.

<u>Beweis</u> **307-13** `a)` `VS` gleich $(x\_M\_y) \wedge (y\_M\_z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x\_M\_y \ldots$"
folgt via **41-5**: $(x\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_y) \vee (x = y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y\_M\_z$"
folgt via **41-5**: $(y\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_z) \vee (y = z)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$((x\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_y) \wedge (y\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_z)) \vee ((x\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_y) \wedge (y = z)) \vee ((x = y) \wedge (y\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_z)) \vee ((x = y) \wedge (y = z)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$((x\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_y) \wedge (y\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_z)) \vee (y = z) \vee (x = y) \vee (x = y).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $$((x\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_y) \wedge (y\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_z)) \vee (y = z) \vee (x = y).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $$(x = y) \vee ((x\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_y) \wedge (y\_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_z)) \vee (y = z).$$

`b)` `VS` gleich $x \leq y \leq z$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $(x \leq y) \wedge (y \leq z)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(x = y) \vee ((x < y) \wedge (y < z)) \vee (y = z).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $(x = y) \vee (x < y < z) \vee (y = z)$.

□

307-14. Verschiedene Resultate, die mehr oder weniger explizit über $\mathsf{ran}\,R$, R ist eine $1+.,\phi-$rekursive Klasse mit Definitions-Bereich$\in\mathbb{N}$ vorliegen, werden hier zusammengefasst. Interessanter Weise kommt dabei $R[\{0\}]$ eine ganz spezielle Rolle zu.

307-14(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist $1+.,\phi$-rekursiv.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,R\in\mathbb{N}$.

Dann folgt "$\mathsf{ran}\,R\subseteq R[\{0\}]\cup\mathsf{ran}\,\phi$".

Beweis **307-14**

`Thema1` $\alpha\in\mathsf{ran}\,R$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha\in\mathsf{ran}\,R$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega:(\Omega\in\mathsf{dom}\,R)\wedge((\Omega,\alpha)\in R)$.

3: Aus 2 "$\ldots\Omega\in\mathsf{dom}\,R\ldots$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\,R\in\mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $0\le\Omega\le-1+\mathsf{dom}\,R$.

4: Aus 3 "$0\le\Omega\le-1+\mathsf{dom}\,R$"
folgt via **307-13**:
$(0=\Omega)\vee(0<\Omega<-1+\mathsf{dom}\,R)\vee(\Omega=-1+\mathsf{dom}\,R)$.

`Fallunterscheidung`

...

...

<u>Beweis</u> **<u>307-14</u>** ...

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, R.$

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $0 = \Omega.$

5: Aus `4.1.Fall` "$0 = \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(0, \alpha) = (\Omega, \alpha).$

6: Aus 5 und
aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in R$"
folgt: $(0, \alpha) \in R.$

7: Aus 6 "$(0, \alpha) \in R$"
folgt via **9-15**: $\alpha \in R[\{0\}].$

8: Aus 7 "$\alpha \in R[\{0\}]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

`4.2.Fall` $0 < \Omega < -1 + \mathsf{dom}\, R.$

5: Aus →) "R ist $1 + .,\phi$-rekursiv",
aus →) "$\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$",
aus `4.2.Fall` "$0 < \Omega < -1 + \mathsf{dom}\, R$" und
aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in R$"
folgt via **307-4**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, \phi) \cap (\mathsf{ran}\, \phi).$

6: Aus 5 "$\alpha \in (\mathsf{dom}\, \phi) \cap (\mathsf{ran}\, \phi)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, \phi.$

7: Aus 6 "$\alpha \in \mathsf{ran}\, \phi$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

...

...

<u>Beweis **307-14**</u> ...

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, R.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.3.Fall` $\Omega = -1 + \mathsf{dom}\, R.$

5: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{ran}\, R.$

6: Aus 5 "$0 \neq \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **7-7**: $0 \neq \mathsf{dom}\, R.$

7: Aus 6 "$0 \neq \mathsf{dom}\, R$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $1 \leq \mathsf{dom}\, R.$

8: Aus 7 "$1 \leq \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **41-5**: $(1 < \mathsf{dom}\, R) \vee (1 = \mathsf{dom}\, R).$

`Fallunterscheidung`

`8.1.Fall` $1 < \mathsf{dom}\, R.$

9: Aus `4.3.Fall` "$\Omega = -1 + \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **PaarAxiom I**:
$(\Omega, \alpha) = (-1 + \mathsf{dom}\, R, \alpha).$

10: Aus 9 und
aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in R$"
folgt: $(-1 + \mathsf{dom}\, R, \alpha) \in R.$

11: Aus →) "R ist $1 + ., \phi$-rekursiv",
aus `8.1.Fall` "$1 < \mathsf{dom}\, R$",
aus →) "$\mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$" und
aus 10 "$(-1 + \mathsf{dom}\, R, \alpha) \in R$"
folgt via **307-7**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, \phi.$

12: Aus 11 "$\alpha \in \mathsf{ran}\, \phi$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

...

...

...

<u>Beweis</u> **307-14** ...

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, R.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.3.Fall` $\Omega = -1 + \mathsf{dom}\, R.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`8.2.Fall` $1 = \mathsf{dom}\, R.$

`9:` $\Omega \stackrel{\text{4.3.Fall}}{=} -1 + \mathsf{dom}\, R \stackrel{\text{8.2.Fall}}{=} -1 + 1 \stackrel{+\text{scola}}{=} 0.$

`10:` Aus 9 "$\Omega = \ldots = 0$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(0, \alpha) = (\Omega, \alpha).$

`11:` Aus 10 und
aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in R$"
folgt: $(0, \alpha) \in R.$

`12:` Aus 11 "$(0, \alpha) \in R$"
folgt via **9-15**: $\alpha \in R[\{0\}].$

`13:` Aus 12 "$\alpha \in R[\{0\}]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, R) \Rightarrow (\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

$\square$

307-15. Eine einfacher zu beweisende Version von **307-15** ist für $\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$ verfügbar.

<u>**307-15(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist $1 + .\,, \phi$-rekursiv.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$.

Dann folgt "$\mathsf{ran}\, R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi$".

<u>Beweis **307-15**</u>

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, R$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, R) \wedge ((\Omega, \alpha) \in R)$.

`3:` Es gilt: $(\Omega = 0) \vee (0 \neq \Omega)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega = 0$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$\Omega = 0$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(0, \alpha) = (\Omega, \alpha)$.

`5:` Aus `4` und
aus `2` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in R$"
folgt: $(0, \alpha) \in R$.

`6:` Aus `5` "$(0, \alpha) \in R$"
folgt via **9-15**: $\alpha \in R[\{0\}]$.

`7:` Aus `6` "$\alpha \in R[\{0\}]$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi$.

...

...

Beweis **307-15** ...

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\, R.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $0 \neq \Omega.$

4: Aus 2"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}.$

5: Aus →) "R ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus →) "$\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$",
aus `3.2.Fall` "$0 \neq \Omega$",
aus 4"$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus 2"$\ldots (\Omega, \alpha) \in R)$"
folgt via **307-5**: $\alpha \in (\mathsf{dom}\, \phi) \cap (\mathsf{ran}\, \phi).$

6: Aus 5"$\alpha \in (\mathsf{dom}\, \phi) \cap (\mathsf{ran}\, \phi)$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, \phi.$

7: Aus 6"$\alpha \in \mathsf{ran}\, \phi$"
folgt via **2-2**: $\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, R) \Rightarrow (\alpha \in R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\, \phi.$

□

307-16. Die Aussagen **307-14,15** werden zusammen gefasst.

307-16(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist $1+.,\phi$-rekursiv.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

Dann folgt "$\mathsf{ran}\,R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\,\phi$".

Beweis **307-16**

1: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\,R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **94-8**: $(\mathsf{dom}\,R = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,R \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\,R = \mathbb{N}$.
Aus $\rightarrow$) "R ist $1+.,\phi$-rekursiv" und
aus `1.1.Fall` "$\mathsf{dom}\,R = \mathbb{N}$"
folgt via **307-15**: $\mathsf{ran}\,R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

`1.2.Fall` $\mathsf{dom}\,R \in \mathbb{N}$.
Aus $\rightarrow$) "R ist $1+.,\phi$-rekursiv" und
aus `1.2.Fall` "$\mathsf{dom}\,R \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-14**: $\mathsf{ran}\,R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ran}\,R \subseteq R[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

□

Analysis: $\texttt{rf}0q\phi$.

Ersterstellung: 11/08/14 **Letzte Änderung: 07/10/14**

308-1. Die bisherige Darstellung von $1+.,\phi$-rekursiven Funktionen läßt eine wichtige Frage offen. Bei gegebenem ϕ und Startwert $(0.q)$ - hier ist offenbar nur q von tatsächlicher Bedeutung - ist zu erwarten, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ höchstens einen Funktions-Wert p gibt, so dass $p = f(n)$ für jede $1+.,\phi$-rekursive Funktion mit Definitions-Bereich in $\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$ und Startwert $(0,q)$ und $n \in \mathsf{dom}\, f$ gilt. Hinter dieser Überlegung steht die Vermutung, dass es eine Funktion gibt, die jedem ϕ und jedem q die "$\subseteq$maximale" $1+.,\phi$-rekursive Funktion mit Definitions-Bereich in $\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$ und Startwert $(0,q)$ zuordnet. Diese Funktion gibt es, wie sich bald herausstellt, tatsächlich, doch soll auf die übliche Funktions-Notation bis auf weiteres verzichtet werden. Statt dessen soll das *Ergebnis der Funktions-Auswertung* - kompliziert genug - mit $\texttt{rf}0q\phi$ bezeichnet werden. Die Buchstaben sollen an "rekursive Folge" erinnern, die 0 ist ein Ordnungs-Parameter - es ist zu erwarten, dass früher oder später kompliziertere Rekursions-Vorschriften als bisher betrachtet werden - und ϕ und q sind die Eingabe-Größen. Mit der vorliegenden Definition wird $\texttt{rf}0q\phi$ erst vorbereitet und dann dargestellt.

308-1(Definition)

1) $\mathsf{308.0}(x,y)$

$$= \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+.,x\text{-rekursiv mit Startwert } (0,y)) \wedge(\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \in \{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N})\}.$$

2) $\texttt{rf}0yx = \bigcup \mathsf{308.0}(x,y)\,.$

308-2. In früherern Abschnitten war oft von der Alternative "$(\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\alpha = \mathbb{N})$" die Rede. Diese Aussage ist äquivalent zu der mittlerweile als ansprechender angesehenen Aussage "$\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$". Dies motiviert einige Aussagen umzuformulieren. Vorbereitend wird eine Aussage über $q \in \{p\} \cup x$ bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`.

308-2(Satz)

`a)` *Aus* "$(q = p \text{ Menge}) \vee (q \in x)$" *folgt* "$q \in \{p\} \cup x$".

`b)` *Aus* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".

`c)` *Aus* "$y \subseteq x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".

Beweis **308-2** `a)` `VS` gleich $(q = p \text{ Menge}) \vee (q \in x)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(q = p \text{ Menge}) \vee (q \in x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q = p$ Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$q = p$ Menge" folgt via **1-6**: $q \in \{p\}$.

`3:` Aus 2 "$q \in \{p\}$" folgt via **2-2**: $q \in \{p\} \cup x$.

`1.2.Fall` $q \in x$.

Aus `1.2.Fall` "$q \in x$" folgt via **2-2**: $q \in \{p\} \cup x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $q \in \{p\} \cup x$.

<u>Beweis **308-2**</u> `c)` `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}))$.

`Thema1.1` $\beta \in x$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$”
folgt: $\mathsf{dom}\,\beta \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{dom}\,\beta \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **94-8**: $(\mathsf{dom}\,\beta = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\beta \in \mathbb{N}) \vee (\beta = \mathbb{N})$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\beta = \mathbb{N}))$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in x) \Rightarrow ((\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\beta = \mathbb{N}))$”
folgt via **305-17**: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup y) = \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup y) = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2` und
aus **159-9**“$\mathbb{N}$ Menge”
folgt: $(\mathsf{dom}\,(\bigcup y) = \mathbb{N}\text{ Menge}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \mathbb{N})$.

`4:` Aus `3`“$(\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \mathbb{N}\text{ Menge}) \vee (\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \mathbb{N})$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(\bigcup y) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`b)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `1`“$x \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{dom}\,(\bigcup x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\square$

308-3. Bereits mehrfach verwendet schadet es nicht, ansonsten immer wieder zu beweisende Eigenschaften von $\{(0,q)\}$ nachzuweisen.

308-3(Satz)

Aus "q Menge" folgt "$\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\}) = 1 \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".

Beweis **308-3** `VS` gleich q Menge.

`1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `VS` gleich "q Menge"
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\}) = \{0\}$.

`2:` Via **95-1(Def)** gilt: $1 = \{0\}$.

`3.1:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **2-2**: $\boxed{1 \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}}$

`3.2:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\}) = 1}$

$\square$

308-4. Für den späteren erfolgreichen Einsatz sollen nun einige Eigenschaften von $\mathsf{308.0}(\phi, q)$ bewiesen werden.

308-4(Satz)

a) *Aus "q Menge"*
folgt "$\{(0, q)\} \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$" *und* "$0 \neq \mathsf{308.0}(\phi, q)$".

b) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi, q))$
$\Rightarrow (\alpha$ *ist* $1 + ., \phi$*-rekursiv mit Startwert* $(0, q))$.

c) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi, q)) \Rightarrow (\alpha$ *Funktion*$)$.

d) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi, q)) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

e) *Aus "ϕ Funktion"*
folgt "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{308.0}(\phi, q)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$".

f) "$p \in \mathsf{308.0}(x, y)$" *genau dann, wenn*
"p *ist* $1 + ., x$*-rekursiv mit Startwert* $(0, y)$"
und "p *Funktion*"
und "$\mathsf{dom}\, p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".

$\mathsf{308.0}(x, y) = \{\omega : (\omega$ *ist* $1 + ., x$*-rekursiv mit Startwert* $(0, y))$
$\wedge(\omega$ *Funktion*$) \wedge (\mathsf{dom}\, \omega \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})\}$
308-1(Def)

<u>Beweis **308-4**</u> `a)` `VS` gleich q Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "q Menge"
folgt via **305-10**: $\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

`1.2:` Via **259-36** gilt: $\{(0,q)\}$ Funktion.

`1.3:` Aus `VS` gleich "q Menge"
folgt via **308-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{(0,q)\}$ Menge.

`2:` Aus `1.1`"$\{(0,q)\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$",
aus `1.2`"$\{(0,q)\}$ Funktion",
aus `1.3`"$\mathsf{dom}\,(\{(0,q)\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus `1.4`"$\{(0,q)\}$ Menge"

folgt via **308-1(Def)**: $\boxed{\{(0,q)\} \in \mathsf{308.0}(\phi,q)}$

`3:` Aus 2"$\{(0,q)\} \in \mathsf{308.0}(\phi,q)$"

folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq \mathsf{308.0}(\phi,q)}$

`b)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi,q)$.   Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi,q)$"   folgt via **308-1(Def)**: α ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

Ergo `Thema1`:
$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi,q)) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv mit Startwert } (0,q))$

`c)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi,q)$.   Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi,q)$"   folgt via **308-1(Def)**: α Funktion.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi,q)) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$

<u>Beweis **308-4** `d)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$.
Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$ "	
folgt via **308-1(Def)**:	$\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{308.0}(\phi, q)) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$

Beweis **308-4** `e)` `VS` gleich ϕ Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha, \beta \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$

`2.1:` Aus `Thema1`“$\alpha \ldots \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$”
folgt via **308-1(Def)**:
$$(\alpha \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv mit Startwert } (0, q)) \wedge (\alpha \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}).$$

`2.2:` Aus `Thema1`“$\ldots \beta \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$”
folgt via **308-1(Def)**:
$$(\beta \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv mit Startwert } (0, q)) \wedge (\beta \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\beta \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}).$$

`3.1:` Aus `2.1`“$\ldots \mathsf{dom}\,\alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **94-8**: $(\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N})$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots \mathsf{dom}\,\beta \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **94-8**: $(\mathsf{dom}\,\beta = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N})$.

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $(\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})$.

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $(\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\beta = \mathbb{N})$.

`5:` Aus `2.1`“α ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q) \ldots$”,
aus `2.2`“β ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q) \ldots$”,
aus `2.1`“$\ldots \alpha$ Funktion...”,
aus `2.2`“$\ldots \beta$ Funktion...”,
aus `VS` gleich “ϕ Funktion”,
aus `4.1`“$(\mathsf{dom}\,\alpha \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\alpha = \mathbb{N})$” und
aus `4.2`“$(\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\,\beta \in \mathbb{N})$”
folgt via **305-8**: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{308.0}(\phi, q)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$

<u>Beweis</u> **308-4** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \mathsf{308.0}(x, y)$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{308.0}(x, y)$ "
folgt via **308-1(Def)**: $(p \text{ ist } 1 + ., x\text{-rekursiv mit Startwert } (0, y))$
$\wedge(p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \text{ ist } 1 + ., x\text{-rekursiv mit Startwert } (0, y))$
$\wedge(p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{dom}\, p$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Funktion$\ldots$ " und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, p$ Menge"
folgt via **26-3**: p Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$(p \text{ ist } 1 + ., x\text{-rekursiv mit Startwert } (0, y))$
$\wedge(p \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$" und
aus `2`"p Menge"
folgt via **308-1(Def)**: $p \in \mathsf{308.0}(x, y)$.

□

308-5. $\mathtt{rf0}q\phi$ vereinigt in bislang vermisster Weise wichtige Eigenschaften der bisherigen Ausführungen über $1+.,\phi$-rekursiven Funktionen mit Startwert $(0,q)$ und Definitions-Bereich in $\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$.

308-5(Satz)

a) *Aus "q Menge" und "ϕ Funktion"*
folgt "$\mathtt{rf0}q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

b) *Aus "ϕ Funktion" folgt "$\mathtt{rf0}q\phi$ Funktion".*

c) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$.

d) $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf0}q\phi)\subseteq\{q\}\cup\mathsf{ran}\,\phi$.

e) *Aus "f ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"*
und "f Funktion"
und "$\mathsf{dom}\,f\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$"
folgt "$f\subseteq\mathtt{rf0}q\phi$".

Beweis **308-5**

$$\mathsf{308.0}(x,y)=\{\omega:(\omega\text{ ist }1+.,x\text{-rekursiv mit Startwert }(0,y))\wedge(\omega\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\omega\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N})\}$$ **308-1(Def)**

Beweis **308-5** `a)` `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (\phi \text{ Funktion})$.

`1.1:` Via **308-4** gilt:
$$\forall \alpha : (\alpha \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv mit Startwert } (0, q)).$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion"
folgt via **308-4**:
$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)).$$

`1.3:` Aus `VS` gleich "q Menge$\ldots$"
folgt via **308-4**: $0 \neq 308.0(\phi, q)$.

`2:` Aus `1.1` "$\forall \alpha : (\alpha \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow (\alpha \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv mit Startwert } (0, q))$",
aus `1.2` "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$" und
aus `1.3` "$0 \neq 308.0(\phi, q)$"
folgt via **302-3**: $\bigcup 308.0(\phi, q)$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`3:` Aus 2 und
aus **308-1(Def)** "$\mathtt{rf}0q\phi = \bigcup 308.0(\phi, q)$"
folgt: $\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`b)` `VS` gleich ϕ Funktion.

`1.1:` Via **308-4** gilt: $\forall \alpha : (\alpha \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "ϕ Funktion"
folgt via **308-4**:
$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)).$$

`2:` Aus `1.1` "$\forall \alpha : (\alpha \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$" und
aus `1.2` "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$"
folgt via **301-2**: $\bigcup 308.0(\phi, q)$ Funktion.

`3:` Aus 2 und
aus **308-1(Def)** "$\mathtt{rf}0q\phi = \bigcup 308.0(\phi, q)$"
folgt: $\mathtt{rf}0q\phi$ Funktion.

`c)`

`1:` Via **308-4** gilt: $\forall \alpha : (\alpha \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1` "$\forall \alpha : (\alpha \in 308.0(\phi, q)) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"
folgt via **308-2**: $\mathsf{dom}\, (\bigcup 308.0(\phi, q)) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`3:` Aus 2 und
aus **308-1(Def)** "$\mathtt{rf}0q\phi = \bigcup 308.0(\phi, q)$"
folgt: $\mathsf{dom}\, (\mathtt{rf}0q\phi) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

<u>Beweis **308-5** `d)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathtt{rf}0q\phi$.

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathtt{rf}0q\phi$" und
aus **308-1(Def)** "$\mathtt{rf}0q\phi = \bigcup \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt: $(\Omega, \alpha) \in \bigcup \mathsf{308.0}(\phi, q)$.

4: Aus 3 "$(\Omega, \alpha) \in \bigcup \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt via **1-12**: $\exists \Psi : (\Omega, \alpha) \in \Psi \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$.

5.1: Aus 4 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \Psi \ldots$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$.

5.2: Aus 4 "$\ldots \Psi \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt via **308-4**:
Ψ ist $1 + .,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

5.3: Aus 4 "$\ldots \Psi \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt via **308-4**: Ψ Funktion.

5.4: Aus 4 "$\ldots \Psi \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt via **308-4**: $\mathsf{dom}\,\Psi \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

6: Aus 5.2 "Ψ ist $1 + .,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt via **302-1(Def)**:
$(\Psi$ ist $1 + .,\phi$-rekursiv$) \wedge ((0, q) \in \Psi)$.

7.1: Aus 6 "Ψ ist $1 + .,\phi$-rekursiv $\ldots$" und
aus 5.4 "$\mathsf{dom}\,\Psi \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **307-16**: $\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \Psi[\{0\}] \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

7.2: Aus 5.3 "Ψ Funktion" und
aus 6 "$\ldots (0, q) \in \Psi$"
folgt via **18-20**: $q = \Psi(0)$.

8: Aus 5.3 "Ψ Funktion"
folgt via **259-16**: $\Psi[\{0\}] = \{\Psi(0)\}$.

...

...

<u>Beweis</u> **308-5** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.
...	
`9:` Aus `7.2` und aus `8` folgt:	$\Psi[\{0\}] = \{q\}$.
`10:` Aus `9` und aus `7.1` folgt:	$\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,\phi$.
`11:` Aus `5.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$” und aus `10`“$\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,\phi$” folgt via **0-4**:	$\alpha \in \{q\} \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi)) \Rightarrow (\alpha \in \{q\} \cup \mathsf{ran}\,\phi)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

`e)` `VS` gleich $(f$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q))$
$\wedge (f$ Funktion$) \wedge (\mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{dom}\, f$ Menge.

`2:` Aus →) “$\ldots f$ Funktion...” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, f$ Menge”
folgt via **26-3**: f Menge.

`3:` Aus `VS` gleich “f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q) \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots f$ Funktion...”,
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” und
aus `2`“f Menge”
folgt via **308-1(Def)**: $f \in 308.0(\phi, q)$.

`4:` Aus `3`“$f \in 308.0(\phi, q)$”
folgt via **1-15**: $f \subseteq \bigcup 308.0(\phi, q)$.

`5:` Aus `4` und
aus **308-1(Def)**“$\mathtt{rf}0q\phi = \bigcup 308.0(\phi, q)$”
folgt: $f \subseteq \mathtt{rf}0q\phi$.

□

308-6. Merkwürdiger Weise liegen meiner Erinnerung nach vorliegende Resultate nicht vor.

308-6(Satz)

a) *Aus* “$p \in \mathsf{dom}\, x$” *und* “$x \subseteq f$ *Funktion*” *folgt* “$x(p) = f(p)$”.

b) $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$.

c) *Aus* “$\mathbb{N} \subseteq x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” *folgt* “$x = \mathbb{N}$”.

d) *Aus* “$x \subseteq f$ *Funktion*” *und* “$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, f$” *folgt* “$x = f$”.

Beweis **308-6** a) VS gleich $(p \in \mathsf{dom}\, x) \wedge (x \subseteq f \text{ Funktion})$.

1: Aus VS gleich “$\ldots x \subseteq f$ Funktion”
folgt via **18-36**: x Funktion.

2: Aus VS gleich “$p \in \mathsf{dom}\, x \ldots$” und
aus 1“x Funktion”
folgt via **18-22**: $(p, x(p)) \in x$.

3: Aus 2“$(p, x(p)) \in x$” und
aus VS gleich “$\ldots x \subseteq f \ldots$”
folgt via **0-4**: $(p, x(p)) \in f$.

4: Aus VS gleich “$\ldots f$ Funktion” und
aus 3“$(p, x(p)) \in f$”
folgt via **18-20**: $x(p) = f(p)$.

b)

1: Es gilt: $(\mathbb{N} \in \mathbb{N}) \vee (\mathbb{N} \notin \mathbb{N})$.
wfFallunterscheidung

1.1.Fall $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$.

2: Aus 1.1.Fall“$\mathbb{N} \in \mathbb{N}$”
folgt via **241-1**: $\mathbb{N}$ endlich.

3: Es gilt 2“$\mathbb{N}$ endlich”.
Via **241-1** gilt “$\mathbb{N}$ unendlich”.
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$.

<u>Beweis **308-6**</u> `c)` `VS` gleich $\mathbb{N} \subseteq x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **94-8**: $(x = \mathbb{N}) \vee (x \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $x \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **241-1**: x endlich.

`3:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{N} \subseteq x \ldots$" und
aus `2`"x endlich"
folgt via **213-5**: $\mathbb{N}$ endlich.

`4:` Es gilt `3`"$\mathbb{N}$ endlich".
Via **241-1** gilt "$\mathbb{N}$ unendlich".
Ex falso quodlibet folgt: $x = \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = \mathbb{N}$.

`d)` `VS` gleich $(x \subseteq f \text{ Funktion}) \wedge (\operatorname{dom} x = \operatorname{dom} f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq f$ Funktion…"
folgt via **18-36**: x Funktion.

`Thema2.1` $\alpha \in \operatorname{dom} x$.
Aus `Thema2.1`"$\alpha \in \operatorname{dom} x$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq f$ Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x(\alpha) = f(\alpha)$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \operatorname{dom} x) \Rightarrow (x(\alpha) = f(\alpha))$"

`2.2:` Aus `1`"x Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots f$ Funktion…",
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \operatorname{dom} x) \Rightarrow (x(\alpha) = f(\alpha))$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \operatorname{dom} x = \operatorname{dom} f$"
folgt via **ISF**: $x = f$.

$\square$

308-7. Falls q eine Menge ist und falls ϕ eine Funktion ist, so ist $\mathtt{rf}0q\phi$ im vorliegenden Sinn die kompletteste $1+.,\phi-$rekursive Funktion mit Startwert $(0,q)$ und Definitions-Bereich$\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$. Im Speziellen liefert $\mathtt{rf}0q\phi$ den einzig möglichen Funktioinswert aller möglichen derartigen Funktionen an jeder Stelle, an der dieser überhaupt sinnvoll definiert werden kann.

<u>**308-7(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) q *Menge.*

$\rightarrow$) ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv mit Startwert* $(0,q)$.

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,f\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $p\in\mathsf{dom}\,f$.

Dann folgt:

a) $p\in\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.

b) $f(p)=\mathtt{rf}0q\phi(p)$.

<u>Beweis **308-7**</u>

`1.1:` Aus →) “ ϕ Funktion ”
folgt via **308-5**: $\mathtt{rf}0q\phi$ Funktion.

`1.2:` Aus →) “ f ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$ ” ,
aus →) “ f Funktion ” und
aus →) “ $\mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ”
folgt via **308-5**: $f \subseteq \mathtt{rf}0q\phi$.

`2:` Aus `1.2` “ $f \subseteq \mathtt{rf}0q\phi$ ”
folgt via **7-10**: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.

`3.a):` Aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus 2 “ $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$ ”
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.

`4.b):` Aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f$ ” ,
aus `1.2` “ $f \subseteq \mathtt{rf}0q\phi$ ” und
aus `1.1` “ $\mathtt{rf}0q\phi$ Funktion ”
folgt via **308-6**: $f(p) = \mathtt{rf}0q\phi(p)$.

$\square$

308-8. Das Ziel dieses Essays liegt nun im Beweis, dass für Funktionen $\phi : A \to A$ und $q \in A$ die Klasse $\mathtt{rf0}q\phi$ eine Funktion mit Definitions-Bereich $\mathbb{N}$ und den erwarteten Eigenschaften ist. Dabei soll alternativ zu **307-12** ohne **AC** ausgekommen werden. Ausser der mathematischen Herausforderung auf **AC** zu verzichten kann bei der angestrebten Zielsetzung die Voraussetzung, dass A eine Menge sein soll, preisgegeben werden. Ähnlich wie vorab zum Beweis von **307-12(AC)** sind einige Vorbereitungen nötig.

308-8(Satz)

a) *Aus "R ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv mit Startwert (p, q)"*
und "S ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv "
und "$R \subseteq S$"
folgt "S ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv mit Startwert (p, q)".

b) *Aus "$p \in x$" folgt "$\{p\} \cup x = x$".*

c) *Aus "$n, m \in \mathbb{N}$" und "$1 + n \in m$" folgt "$n \in m$".*

d) *Aus "$x \in n \in \mathbb{N}$" folgt "$\{1 + x\} \cup n \in \mathbb{N}$".*

Beweis **308-8** a) VS gleich $(R$ ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(p, q))$
$\wedge(S$ ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv$) \wedge (R \subseteq S)$.

1: Aus VS gleich "R ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(p, q)\ldots$"
folgt via **302-1(Def)**: $(p, q) \in R$.

2: Aus 1"$(p, q) \in R$" und
aus VS gleich "$\ldots R \subseteq S$"
folgt via **0-4**: $(p, q) \in S$.

3: Aus VS gleich "$\ldots S$ ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv$\ldots$ " und
aus 2"$(p, q) \in S$"
folgt via **302-1(Def)**: S ist $c\_E\_.$, ϕ-rekursiv mit Startwert (p, q).

<u>Beweis **308-8**</u> `b)` `VS` gleich $p \in x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$\{p\} \subseteq x$"
folgt via **2-10**: $\{p\} \cup x = x$.

`c)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $n \in 1 + n$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \ldots \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2`"$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \in m$"
folgt via **197-5**: $1 + n \subseteq m$.

`3:` Aus `1.1`"$n \in 1 + n$" und
aus `2`"$1 + n \subseteq m$"
folgt via **0-4**: $n \in m$.

`d)` `VS` gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $x \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $x < n$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$x < n$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + x \leq n$.

...

<u>Beweis **308-8**</u> `d)` `VS` gleich $x \in n \in \mathbb{N}$.

...

`3:` Aus 2"$1 + x \leq n$"
folgt via **41-5**: $(1 + x < n) \vee (1 + x = n)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $1 + x < n$.

`4:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + x \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4`"$1 + x \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$" und
aus `3.1.Fall`"$1 + x < n$"
folgt via **197-5**: $1 + x \in n$.

`6:` Aus `5`"$1 + x \in n$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{1 + x\} \cup n = n$.

`7:` Aus `6` und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt: $\{1 + x\} \cup n \in \mathbb{N}$.

`3.2.Fall` $1 + x = n$

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via $\mathsf{A}\mathbb{N}$**Axiom**: $1 + n = \{n\} \cup n$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\{n\} \cup n \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.2.Fall`
folgt: $\{1 + x\} \cup n \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{1 + x\} \cup n \in \mathbb{N}$.

□

308-9. Falls $p \in \mathsf{dom}\, f$, f Funktion, so ist $\{(p, q)\} \cup f$ unter einer nahe liegenden Bedingung eine Funktion.

308-9(Satz) *Unter den Voraussetzungen ...*

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ $p \in \mathsf{dom}\, f$

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\{(p, q)\} \cup f$ *Funktion.*

`ii)` *"$q = f(p)$" oder "q Unmenge".*

`iii)` $\{(p, q)\} \cup f = f$.

<u>Beweis **308-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\{(p,q)\} \cup f$ Funktion.

`1:` Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` q Menge.

`2:` Aus →) "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`3:` Aus `2`"p Menge" und
aus `1.1.Fall`"q Menge"
folgt via **259-36**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`4:` Aus `3`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **2-2**: $(p,q) \in \{(p,q)\} \cup f$.

`5:` Aus →) "f Funktion" und
aus →) "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`6:` Aus `5`"$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **2-2**: $(p, f(p)) \in \{(p,q)\} \cup f$.

`7:` Aus `VS` gleich "$\{(p,q)\} \cup f$ Funktion",
aus `4`"$(p,q) \in \{(p,q)\} \cup f$" und
aus `5`"$(p, f(p)) \in \{(p,q)\} \cup f$"
folgt via **18-18(Def)**: $q = f(p)$.

`1.2.Fall` q Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(q = f(p)) \vee (q \text{ Unmenge})$.

Beweis **308-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(q = f(p)) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $q = f(p)$.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus $\rightarrow$) "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`1.2:` Aus `0.1.Fall` "$q = f(p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, q) = (p, f(p))$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.1`
folgt: $(p, q) \in f$.

`3:` Aus `2` "$(p, q) \in f$"
folgt via **308-8**: $\{(p, q)\} \cup f = f$.

`0.2.Fall` q Unmenge

`1:` Aus `0.2.Fall` "q Unmenge"
folgt via **259-36**: $\{(p, q)\} = 0$.

`2:` Via **2-17** gilt: $0 \cup f = f$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\{(p, q)\} \cup f = f$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{(p, q)\} \cup f = f$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\{(p, q)\} \cup f = f$.

Aus `VS` und
aus $\rightarrow$) "f Funktion"
folgt: $\{(p, q)\} \cup f$ Funktion.

□

308-10. Bislang wurde **306-5** noch nicht für Funktionen f, ϕ und Algebren $\Box$ adaptiert.

<u>**308-10(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) $\{(p,q)\}, f$ *ist* $c\_\Box\_.,\phi$*-rekursiv.*

→) q *Menge.*

→) $(p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (q = f(p))$.

→) f, ϕ *Funktion.*

→) $\Box$ *Algebra in* A.

→) $(c\_\Box\_p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(c\_\Box\_p) = \phi(q))$.

→) $\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (c\_\Box\_\alpha = p)) \Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))$.

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f$ *Funktion.*

b) $\{(p,q)\} \cup f$ *ist* $c\_\Box\_.,\phi$*-rekursiv.*

Beweis **308-10** a)

1: Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, f) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$(p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (q = f(p))$"
folgt: $q = f(p)$.

3: Aus →) "$f \ldots$ Funktion" ,
aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 2 "$q = f(p)$"
folgt via **308-9**: $\{(p,q)\} \cup f$ Funktion.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, f$.

Aus `1.2.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$f \ldots$ Funktion"
folgt via **261-4**: $\{(p,q)\} \cup f$ Funktion.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{(p,q)\} \cup f$ Funktion.

Beweis **308-10** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $((\beta,\gamma)\in f)\wedge(((c,p),\beta)\in\square)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$(\beta,\gamma)\in f\ldots$”
folgt via **7-5**: $\beta\in\mathsf{dom}\,f$.

`2.2:` Aus →)“$f\ldots$ Funktion” und
aus `Thema1.1`“$(\beta,\gamma)\in f\ldots$”
folgt via **18-20**: $\gamma=f(\beta)$.

`2.3:` Aus →)“$\square$ Algebra in A” und
aus `Thema1.1`“$\ldots((c,p),\beta)\in\square$”
folgt via **306-11**: $\beta=c\_\square\_p$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\beta\in\mathsf{dom}\,f$”
folgt via **17-5**: $f(\beta)$ Menge.

`3.2:` Aus `2.3` und
aus `2.1`
folgt: $c\_\square\_p\in\mathsf{dom}\,f$.

`4:` Aus `3.2`“$c\_\square\_p\in\mathsf{dom}\,f$” und
aus →)“$(c\_\square\_p\in\mathsf{dom}\,f)\Rightarrow(f(c\_\square\_p)=\phi(q))$”
folgt: $f(c\_\square\_p)=\phi(q)$.

`5:` Aus `2.3` und
aus `4`“$\ldots f(c\_\square\_p)=\phi(q)$”
folgt: $f(\beta)=\phi(q)$.

`6.1:` Aus `5` und
aus `3.1`
folgt: $\phi(q)$ Menge.

`6.2:` Aus `2.2` und
aus `5`
folgt: $\gamma=\phi(q)$.

...

...

<u>Beweis</u> **308-10** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $((\beta, \gamma) \in f) \wedge (((c, p), \beta) \in \square)$.

...

`7.1:` Aus →) "... ϕ Funktion" und
aus `6.1` "$\phi(q)$ Menge"
folgt via **304-1**: $(q, \phi(q)) \in \phi$.

`7.2:` Aus `6.2` "$\gamma = \phi(q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(q, \gamma) = (q, \phi(q))$.

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $(q, \gamma) \in \phi$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta, \gamma : (((\beta, \gamma) \in f) \wedge (((c, p), \beta) \in \square)) \Rightarrow ((q, \gamma) \in \phi)$"

...

<u>Beweis **308-10**</u> `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta, \gamma \in f) \wedge (((c, \beta), p) \in \Box)$

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\beta, \gamma) \in f \ldots$”
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`2.2:` Aus →)“$f \ldots$ Funktion” und
aus `Thema1.2`“$(\beta, \gamma) \in f \ldots$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`2.3:` Aus →)“$\Box$ Algebra in A” und
aus `Thema1.2`“$\ldots ((c, \beta), p) \in \Box$”
folgt via **306-11**: $p = c\_\Box\_\beta$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $c\_\Box\_\beta = p$.

`4:` Aus `2.1`“$\beta \in \mathsf{dom}\, f$”,
aus `3`“$c\_\Box\_\beta = p$” und
aus →) “$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (c\_\Box\_\alpha = p))$
$\Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))$”
folgt: $q = \phi(f(\beta))$.

`5:` Aus `2.2` und
aus `4`
folgt: $q = \phi(\gamma)$.

`6:` Aus `5` und
aus →)“q Menge”
folgt: $\phi(\gamma)$ Menge.

`7:` Aus `6`“$\phi(\gamma)$ Menge”
folgt via **304-1**: $(\gamma, \phi(\gamma)) \in \phi$.

`8:` Aus `5`“$q = \phi(\gamma)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\gamma, q) = (\gamma, \phi(\gamma))$.

`9:` Aus `7` und
aus `8`
folgt: $(\gamma, q) \in \phi$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \beta, \gamma : (((\beta, \gamma) \in f) \wedge (((c, \beta), p) \in \Box)) \Rightarrow ((\gamma, q) \in \phi)$”

...

<u>Beweis</u> **<u>308-10</u>** `b)` ...

`1.3:` Aus →) "$\{(p,q)\}, f$ ist $c\_\square\_., \phi$-rekursiv",
aus `A1` gleich "$\forall\beta,\gamma : (((\beta,\gamma) \in f) \wedge (((c,p),\beta) \in \square)) \Rightarrow ((q,\gamma) \in \phi)$" und
aus `A2` gleich "$\forall\beta,\gamma : (((\beta,\gamma) \in f) \wedge (((c,\beta),p) \in \square)) \Rightarrow ((\gamma,q) \in \phi)$"
folgt via **306-5**: $\{(p,q)\} \cup f$ ist $c\_\square\_., \phi$-rekursiv.

□

308-11. Die für $1+.,\phi$-rekursive Funktionen mit Definitions-Bereich$\subseteq \mathbb{A}$ adaptierte Version von **308-10** ist von besonderem Interesse.

308-11(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $\{(p,q)\}, f$ *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow)$ q *Menge.*

$\rightarrow)$ $(p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (q = f(p))$.

$\rightarrow)$ f,ϕ *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{A}$.

$\rightarrow)$ $(1+p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(1+p) = \phi(q))$.

$\rightarrow)$ $(-1+p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (q = \phi(f(-1+p)))$.

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f$ *Funktion.*

b) $\{(p,q)\} \cup f$ *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

<u>Beweis **308-11**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (1 + \alpha = p).$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{A}.$

`3:` Aus 2"$\alpha \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: α Zahl.

`4:` Aus `Thema1.1`"$\ldots 1 + \alpha = p$" und
aus 3"α Zahl"
folgt via **307-2**: $-1 + p = \alpha.$

`5:` Aus 4 und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt: $-1 + p \in \mathsf{dom}\, f.$

`6:` Aus 5"$-1 + p \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$(-1 + p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (q = \phi(f(-1 + p)))$"
folgt: $q = \phi(f(-1 + p)).$

`7:` Aus 6 und
aus 4
folgt: $q = \phi(f(\alpha)).$

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (1 + \alpha = p)) \Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))\text{”}}$

`1.2:` Aus →) "$\{(p, q)\}, f$ ist $1 + ., \phi$-rekursiv",
aus →) "q Menge",
aus →) "$(p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (q = f(p))$",
aus →) "f, ϕ Funktion",
aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus →) "$(1 + p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(1 + p) = \phi(q))$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (1 + \alpha = p)) \Rightarrow (q = \phi(f(\alpha)))$"
folgt via **308-10**:
$$(\{(p, q)\} \cup f \text{ Funktion}) \wedge (\{(p, q)\} \cup f \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}).$$

□

308-12. Mitunter können rekursive Klassen leicht erweitert werden oder haben zumindest ein weiteres Element als das aktuell betrachtete. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - ab)`:

308-12(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow\!)$ f,ϕ *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $p \in \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow\!)$ $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$.

Dann folgt:

a) $\{(1+p,\phi(f(p)))\} \cup f$ *Funktion.*

b) $\{(1+p,\phi(f(p)))\} \cup f$ *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

c) $1+p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p,\phi(f(p)))\} \cup f) \in \mathbb{N}$.

Beweis **308-12**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$f(p) \in \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **17-5**: $\phi(f(p))$ Menge.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$p \in \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $p \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{N}$.

`1.4:` Aus $\rightarrow\!)$ "$p \in \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$"
folgt via **308-8**: $\{1+p\} \cup \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$p \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1+p \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **159-9**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{A}$.

...

<u>Beweis **308-12**</u> ...

`3.1`: Aus `2.1` " $1+p \in \mathbb{N}$ "
folgt via **ElementAxiom**: $1+p$ Menge.

`3.2`: Aus `2.1` " $1+p \in \mathbb{N}$ " und
aus `1.1` " $\phi(f(p))$ Menge "
folgt via **307-9**:
$\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(1+p, f(p))$.

`4.1`: Aus `3.1` " $\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert (n, q) "
folgt via **302-1(Def)**: $\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

`4.2`: Aus `3.1` " $1+p$ Menge " und
aus `1.1` " $\phi(f(p))$ Menge "
folgt via **261-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) = \{1+p\} \cup \mathsf{dom}\, f$.

`4.3`: Aus `3.1` " $1+p$ Menge "
folgt via **2-28**: $1+p \in \{1+p\} \cup \mathsf{dom}\, f$.

`5.c)`: Aus `4.3` und
aus `4.2` und
aus `1.4`
folgt: $1+p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \mathbb{N}$.

> `Thema5.1` $1+p \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `6`: Aus →) " f ... Funktion ",
> aus →) " f ist $1+.,\phi$-rekursiv ",
> aus **AAII** " A Algebra in $\mathbb{A}$ ",
> aus →) " ... ϕ Funktion ",
> aus →) " $p \in \mathsf{dom}\, f$ ... " und
> aus `Thema5.1` " $1+p \in \mathsf{dom}\, f$ "
> folgt via **304-8**: $f(1+p) = \phi(f(p))$.
>
> `7`: Aus `6`
> folgt: $\phi(f(p)) = f(1+p)$.

Ergo `Thema5.1`: `A1` | " $(1+p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = f(1+p))$ "

...

Beweis **308-12** . . .

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f.$

6: Aus 2.1"$1+p \in \mathbb{N}$",
aus →)"$\ldots \mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$" und
aus Thema5.2"$1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **308-8**: $1+p \in \mathsf{dom}\, f.$

7.1: Aus 6"$1+p \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus A1 gleich "$(1+p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(1+p) = \phi(f(p)))$"
folgt: $f(1+p) = \phi(f(p)).$

7.2: Aus →)"$f \ldots$ Funktion",
aus →)"f ist $1+.$, ϕ-rekursiv",
aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus →)"$\ldots \phi$ Funktion",
aus 6"$1+p \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus Thema5.2"$1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **304-8**: $f(1+(1+p)) = \phi(f(1+p)).$

8: Aus 7.1 und
aus 7.2
folgt: $f(1+(1+p)) = \phi(\phi(f(p))).$

Ergo Thema5.2: $\boxed{\texttt{A2} \;\Big|\; \text{“}(1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(1+(1+p)) = \phi(\phi(f(p))))\text{”}}$

. . .

<u>Beweis</u> **<u>308-12</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema5.3}}$ $-1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f.$

`6:` Aus `1.2`“$p \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: p Zahl.

`7:` Aus `6`“p Zahl”
folgt via **300-5**: $-1+(1+p) = p.$

`8:` Aus `7`
folgt: $p = -1+(1+p).$

`9:` Aus `8`
folgt: $\phi(f(p)) = \phi(f(-1+(1+p))).$

Ergo `Thema5.3`:

`A3` | “$(-1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = \phi(f(-1+(1+p))))$”

`5.ab):` Aus `4.1`“$\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv”,
aus →)“f ist $1+.,\phi$-rekursiv”,
aus `1.1`“$\phi(f(p))$ Menge”,
aus `A1` gleich “$(1+p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = f(1+p))$”,
aus →)“f, ϕ Funktion”,
aus `2.2`“$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{A}$”,
aus `A2` gleich “$(1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(1+(1+p)) = \phi(\phi(f(p))))$” und
aus `A3` gleich “$(-1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = \phi(f(-1+(1+p))))$”
folgt via **308-11**:

$$(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion})$$
$$\wedge(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}).$$

□

308-13. Von **308-12** ist eine “$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$-Version” verfügbar.
Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - ab)`:

308-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f *ist* $1 + .,\phi$*-rekursiv.*

$\rightarrow$) f, ϕ *Funktion.*

$\rightarrow$) $p \in \mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$.

Dann folgt:

a) $\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f$ *Funktion.*

b) $\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f$ *ist* $1 + .,\phi$*-rekursiv.*

c) $1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) = \mathbb{N}$.

Beweis **308-13**

1.1: Aus $\rightarrow$) “$f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$”
folgt via **17-5**: $\phi(f(p))$ Menge.

1.2: Aus $\rightarrow$) “$p \in \mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$”
folgt: $p \in \mathbb{N}$.

1.3: Aus $\rightarrow$) “$\ldots \mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$” und
aus **159-9** “$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{A}$.

2: Aus 1.2 “$p \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1 + p \in \mathbb{N}$.

...

<u>Beweis **308-13**</u> ...

`3.1:` Aus 2"$1+p \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+p$ Menge.

`3.2:` Aus 2"$1+p \in \mathbb{N}$" und
aus `1.1`"$\phi(f(p))$ Menge"
folgt via **307-9**:
$\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.$, ϕ-rekursiv mit Startwert $(1+p, f(p))$.

`3.3:` Aus 2"$1+p \in \mathbb{N}$"
folgt via **308-8**: $\{1+p\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.$, ϕ-rekursiv mit Startwert (n, q)"
folgt via **302-1(Def)**: $\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.$, ϕ-rekursiv.

`4.2:` Aus `3.1`"$1+p$ Menge" und
aus `1.1`"$\phi(f(p))$ Menge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) = \{1+p\} \cup \mathsf{dom}\, f$.

`4.3:` Aus `3.1`"$1+p$ Menge"
folgt via **2-28**: $1+p \in \{1+p\} \cup \mathsf{dom}\, f$.

`4.4:` Aus `3.3` und
aus →) "$\ldots \mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$"
folgt: $\{1+p\} \cup \mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

`5.c):` Aus `4.3`,
aus `4.2` und
aus `4.4`
folgt: $1+p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) = \mathbb{N}$.

...

Beweis **308-13** . . .

`Thema5.1` $1 + p \in \mathsf{dom}\, f$.

6: Aus →) “ f . . . Funktion ” ,
aus →) “ f ist $1 + .,\phi$-rekursiv ” ,
aus **AAII** “ A Algebra in $\mathbb{A}$ ” ,
aus →) “ . . . ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f$ . . . ” und
aus `Thema5.1` “ $1 + p \in \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt via **304-8**: $f(1 + p) = \phi(f(p))$.

7: Aus 6
folgt: $\phi(f(p)) = f(1 + p)$.

Ergo `Thema5.1`: `A1` | “ $(1 + p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = f(1 + p))$ ”

. . .

<u>Beweis **308-13**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $1+(1+p)\in\mathsf{dom}\,f.$

`6:` Aus `2.1`"$1+p\in\mathbb{N}$" und
aus →)"$\ldots\mathsf{dom}\,f=\mathbb{N}$"
folgt: $1+p\in\mathsf{dom}\,f.$

`7.1:` Aus `6`"$1+p\in\mathsf{dom}\,f$" und
aus `A1` gleich "$(1+p\in\mathsf{dom}\,f)\Rightarrow(f(1+p)=\phi(f(p)))$"
folgt: $f(1+p)=\phi(f(p)).$

`7.2:` Aus →)"$f\ldots$ Funktion",
aus →)"f ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus **AAII**"A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus →)"$\ldots\phi$ Funktion",
aus `6`"$1+p\in\mathsf{dom}\,f$" und
aus `Thema5.2`"$1+(1+p)\in\mathsf{dom}\,f$"
folgt via **304-8**: $f(1+(1+p))=\phi(f(1+p)).$

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $f(1+(1+p))=\phi(\phi(f(p))).$

Ergo `Thema5.2`: | `A2` | "$(1+(1+p)\in\mathsf{dom}\,f)\Rightarrow(f(1+(1+p))=\phi(\phi(f(p))))$" |

...

Beweis **308-13** . . .

$\boxed{\texttt{Thema5.3}}$ $$-1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f.$$

`6`: Aus `1.2`“$p \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $$p \text{ Zahl}.$$

`7`: Aus `6`“p Zahl”
folgt via **300-5**: $$-1+(1+p) = p.$$

`8`: Aus `7`
folgt: $$p = -1+(1+p).$$

`9`: Aus `8`
folgt: $$\phi(f(p)) = \phi(f(-1+(1+p))).$$

Ergo `Thema5.3`:

`A3`	“$(-1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = \phi(f(-1+(1+p))))$”

`5.ab)`: Aus `4.1`“$\{(1+p, \phi(f(p)))\}$ ist $1+.,\phi$-rekursiv”,
aus →)“f ist $1+.,\phi$-rekursiv”,
aus `1.1`“$\phi(f(p))$ Menge”,
aus `A1` gleich “$(1+p \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = f(1+p))$”,
aus →)“f, ϕ Funktion”,
aus `1.3`“$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{A}$”,
aus `A2` gleich “$(1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(1+(1+p)) = \phi(\phi(f(p))))$” und
aus `A3` gleich “$(-1+(1+p) \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (\phi(f(p)) = \phi(f(-1+(1+p))))$”
folgt via **308-11**:
$$(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion})$$
$$\wedge(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}).$$

□

308-14. Die beiden vorangehenden Sätze können wohlgefällig kombiniert werden.

308-14(Satz) *Es gelte:*

→) f *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

→) f,ϕ *Funktion.*

→) $p \in \mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

→) $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$.

Dann folgt:

a) $\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f$ *Funktion.*

b) $\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f$ *ist* $1+.,\phi$*-rekursiv.*

c) $1+p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

<u>Beweis **308-14**</u>

1: Aus →) “ . . . $\mathsf{dom}\, f \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ”
folgt via **94-8**: $(\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}) \vee (\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

1.1: Aus →) “ f ist $1 + .,\phi$-rekursiv ” ,
aus →) “ f, ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” ,
aus `1.1.Fall` “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$” und
aus →) “ $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$ ”
folgt via **308-13**:

$$(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion})$$
$$\wedge(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}).$$

1.2: Aus →) “ f ist $1 + .,\phi$-rekursiv ” ,
aus →) “ f, ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” ,
aus `1.1.Fall` “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$” und
aus →) “ $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$ ”
folgt via **308-13**:

$$1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) = \mathbb{N}.$$

2: Aus 1.2 “ . . . $\mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) = \mathbb{N}$ ”
folgt via **94-8**: $\mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

3: Aus 1.2 “ $1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) \ldots$ ” und
aus 2
folgt: $1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

4: Aus 1.1 und
aus 3
folgt:

$$(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion})$$
$$\wedge(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv})$$
$$\wedge(1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1+p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}).$$

. . .

Beweis **308-14**

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall $\qquad$ $\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$.

1.1: Aus →) “ f ist $1 + ., \phi$-rekursiv ” ,
aus →) “ f, ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” ,
aus 1.2.Fall “ $\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$” und
aus →) “ $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$ ”
folgt via **308-12**:

$$(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion}) \wedge (\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}).$$

1.2: Aus →) “ f ist $1 + ., \phi$-rekursiv ” ,
aus →) “ f, ϕ Funktion ” ,
aus →) “ $p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” ,
aus 1.2.Fall “ $\mathsf{dom}\, f \in \mathbb{N}$” und
aus →) “ $f(p) \in \mathsf{dom}\, \phi$ ”
folgt via **308-12**:

$$1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \mathbb{N}.$$

2: Aus 1.2 “ $\ldots \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **2-2**: $\mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

3: Aus 1.2 “ $1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \ldots$ ” und
aus 2
folgt: $1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

4: Aus 1.1 und
aus 3
folgt:

$$(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion}) \wedge (\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}).$$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$$(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ Funktion}) \wedge (\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f \text{ ist } 1 + ., \phi\text{-rekursiv}) \wedge (1 + p \in \mathsf{dom}\,(\{(1 + p, \phi(f(p)))\} \cup f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}).$$

□

308-15. Hier muss A keine Menge sein. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c)`.

308-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $q \in A$.

$\rightarrow$) $\phi : A \to A$.

Dann folgt:

a) $\mathtt{rf}0q\phi : \mathbb{N} \to A$.

b) $\mathtt{rf}0q\phi(0) = q$.

c) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}0q\phi(1+\alpha) = \phi(\mathtt{rf}0q\phi(\alpha)))$.

Beweis **308-15**

$\mathsf{308.0}(x,y) = \{\omega : (\omega \text{ ist } 1+., x\text{-rekursiv mit Startwert } (0,y)) \wedge (\omega \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})\}$

308-1(Def)

1.1: Aus $\rightarrow$) "$q \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$\phi : A \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\phi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\phi = A) \wedge (\mathsf{ran}\,\phi \subseteq A)$.

1.3: Via **308-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

1.4: Via **308-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,\phi$.

1.5: Aus $\rightarrow$) "$q \in A$"
folgt via **1-8**: $\{q\} \subseteq A$.

...

<u>Beweis</u> **308-15** ...

`2.1:` Aus `1.2`"ϕ Funktion..."
folgt via **308-5**: $\mathtt{rf}0q\phi$ Funktion.

`2.2:` Aus `1.1`"q Menge" und
aus `1.2`"ϕ Funktion..."
folgt via **308-5**: $\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$.

`2.3:` Aus `1.5`"$\{q\}\subseteq A$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{ran}\,\phi\subseteq A$"
folgt via **2-12**: $\{q\}\cup\mathsf{ran}\,\phi\subseteq A$.

`3.b):` Aus `2.1`"$\mathtt{rf}0q\phi$ Funktion" und
aus `2.2`"$\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"
folgt via **304-15**: $\mathtt{rf}0q\phi(0)=q$.

`3.1:` Aus `1.4`"$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi)\subseteq\{q\}\cup\mathsf{ran}\,\phi$" und
aus `2.3`"$\{q\}\cup\mathsf{ran}\,\phi\subseteq A$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}0q\phi)\subseteq A$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"
folgt via **306-15**: $0\in\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.

`3.3:` Aus `2.2`"$\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv mit Startwert $(0,q)$"
folgt via **302-1(Def)**: $\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv.

...

<u>Beweis **308-15**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$.

5: Aus Thema4.1"$\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi))$.

6: Aus 2.1"$\mathtt{rf0}q\phi$ Funktion" und
aus 5"$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$"
folgt via **18-22**: $\mathtt{rf0}q\phi(\alpha) \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$.

7: Aus 6"$\mathtt{rf0}q\phi(\alpha) \in \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$" und
aus 3.1"$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf0}q\phi) \subseteq A$"
folgt via **0-4**: $\mathtt{rf0}q\phi(\alpha) \in A$.

8: Aus 7"$\mathtt{rf0}q\phi(\alpha) \in A$" und
aus 1.2"$\ldots \mathsf{dom}\,\phi = A \ldots$"
folgt: $\mathtt{rf0}q\phi(\alpha) \in \mathsf{dom}\,\phi$.

9: Aus 3.3"$\mathtt{rf0}q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus 2.1"$\mathtt{rf0}q\phi$ Funktion",
aus 1.2"ϕ Funktion..." ,
aus 5"$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$",
aus 1.3"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus 8"$\mathtt{rf0}q\phi(\alpha) \in \mathsf{dom}\,\phi$"
folgt via **308-14**:

$$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \text{ Funktion}$$
$$\wedge \quad \{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \text{ ist } 1+.,\phi\text{-rekursiv}$$
$$\wedge \quad 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}.$$

10: Aus 9"$\ldots \{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi$ ist $1+.,\phi$-rekursiv",
aus 9"$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi$ Funktion..." und
aus 9"$\ldots \mathsf{dom}\,(\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **308-4**:

$$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \in 308.0(\phi, q)\,.$$

...

...

Beweis **308-15** ...

`Thema4.1` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$.

...

`11:` Aus `10` "$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \in 308.0(\phi, q)$"
folgt via **1-15**:
$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \subseteq \bigcup 308.0(\phi, q)$.

`12:` Aus `11` und
aus **308-1(Def)** "$\mathtt{rf0}q\phi = \bigcup 308.0(\phi, q)$"
folgt: $\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \subseteq \mathtt{rf0}q\phi$.

`13:` Aus `12` "$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi \subseteq \mathtt{rf0}q\phi$"
folgt via **158-1**: $\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \subseteq \mathtt{rf0}q\phi$.

`14:` Aus `13` "$\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \subseteq \mathtt{rf0}q\phi$"
folgt via **7-10**:
$\mathsf{dom}\,(\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\}) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$.

`15:` Aus `9` "$\ldots 1+\alpha$
$\in \mathsf{dom}\,(\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\} \cup \mathtt{rf0}q\phi) \ldots$" und
aus `14` "$\mathsf{dom}\,(\{(1+\alpha, \phi(\mathtt{rf0}q\phi(\alpha)))\}) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$"
folgt via **0-4**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$.

Ergo `Thema4.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi))$"

`4.2:` Aus `3.2` "$0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi))$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$.

`5:` Aus `4.2` "$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi)$" und
aus `1.3` "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **308-6**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi) = \mathbb{N}$.

`6.a):` Aus `2.1` "$\mathtt{rf0}q\phi$ Funktion",
aus `5` "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf0}q\phi) = \mathbb{N}$" und
aus `3.1` "$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf0}q\phi) \subseteq A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathtt{rf0}q\phi : \mathbb{N} \to A$.

...

Beweis **308-15** ...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

8: Aus Thema7 "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

9: Aus Thema7 "$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus 8 "$1 + \alpha \in \mathbb{N}$" und
aus 6.a) "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi) = \mathbb{N}$"
folgt: $\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$.

10: Aus 2.1 "$\mathtt{rf}0q\phi$ Funktion",
aus 3.3 "$\mathtt{rf}0q\phi$ ist $1 + .$, ϕ-rekursiv",
aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$",
aus 1.2 "ϕ Funktion..." und
aus 9 "$\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}0q\phi)$"
folgt via **304-8**: $\mathtt{rf}0q\phi(1 + \alpha) = \phi(\mathtt{rf}0q\phi(\alpha))$.

Ergo Thema7: $\boxed{\texttt{Ac)} \ \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}0q\phi(1 + \alpha) = \phi(\mathtt{rf}0q\phi(\alpha)))\text{”}}$

$\square$

- **C. Bandelow**, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **H.B. Mann & D.R. Whitney**, *On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947).
- **R. Mlitz**, *Analysis 1.2.3*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.